

**Exercice 1**

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

2. Soit $(x_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs vérifiant :

$$\text{Pour tout entier } n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^n x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2.$$

- (a) En prenant $n = 1$, justifier que $x_1 = 1$.
 (b) En utilisant une récurrence sur n montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k = k$.

Exercice 2

Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on rappelle que $e^z = e^x e^{iy}$.

Soit sur $\mathbb{C}$ la relation R donnée par :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad z R z' \Leftrightarrow z e^{z'} = z' e^z.$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$
 2. (a) Existe-il $z \in \mathbb{C}$ telque $e^z = 0$?
 (b) Donner $Cl(0)$ la classe de 0 par la relation R .
 3. Soit $x, y \in \mathbb{R}^*$.
 (a) Montrer que si $(ix)R(iy)$ alors $|x| = |y|$.
 (b) Etudier suivant la valeur du réel x , l'ensemble $Cl(ix) \cap i\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

On note $AB = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $BA = (c'_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

(a) Rappeler c_{ij} et c'_{ij} pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

(b) Donner c_{ij} et c'_{ij} lorsque $B = {}^t A$. (${}^t A$ désigne la transposée de A)

2. On rappelle que la trace d'une matrice carrée $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est le scalaire

$$\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}.$$

(a) Vérifier que pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \text{ et } \text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A).$$

(b) Justifier que, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

(c) Dédurre que pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$.

3. Pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t AB)$.

La matrice A est dite orthogonale à B si $\langle A, B \rangle = 0$, on écrit $A \perp B$.

On note par $A^\perp = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } \langle A, X \rangle = 0\}$

(a) i. Justifier que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A \perp (0)$. ((0) désigne la matrice nulle)

ii. Justifier que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^\perp$ n'est pas vide.

iii. Trouver $(0)^\perp$

(b) Montrer que si $A \in A^\perp$ alors $A = (0)$.

(c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $A^\perp = (\alpha A)^\perp$.

(d) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

i. Montrer que $A^\perp \cap B^\perp \subset (A + B)^\perp$.

ii. L'inclusion réciproque est-elle vraie ? Justifier.

(e) Etudier l'orthogonalité deux à deux des matrices suivantes

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

