



Examen d'Algèbre - Semestre N°1
Section : M.P.1

Durée : 2 Heures

Date : Janvier 2024

Exercice

1. Soient E un ensemble non vide et f une application de E vers E . On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . On note

$$X = \{A \in \mathcal{P}(E); f^{-1}(f(A)) = A\}$$

- (a) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$. En déduire que X est non vide.
 (b) Montrer que, pour tout $(A, B) \in X^2$, $A \cup B$ et $A \cap B$ sont deux éléments de X .
 (c) Montrer que $X = \mathcal{P}(E)$ si, et seulement si, f est injective.
2. On suppose que E contient au moins deux éléments. Soit x un élément fixé de E .
 On définit dans $\mathcal{P}(E)$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$ARB \iff x \in A \cap B \text{ ou } x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

où $\overline{A}$ (respectivement $\overline{B}$) désigne le complémentaire de A (respectivement de B) dans E .

- (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
 (b) Déterminer $Cl_{\mathcal{R}}(\{x\})$ la classe d'équivalence de $\{x\}$ modulo $\mathcal{R}$, puis $Cl_{\mathcal{R}}(\overline{\{x\}})$.

Problème

Dans tout le problème $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée X et à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie I Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\hat{P}$ le polynôme donné par $\hat{P}(X) = P(-X)$. Ainsi, un polynôme P est dit pair si $\hat{P} = P$, et il est dit impair si $\hat{P} = -P$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
- (a) Justifier que $\deg(\hat{P}) = \deg(P)$.
 (b) Donner le coefficient dominant de $\hat{P}$ en fonction de celui de P , où $P \neq 0$.
 (c) Montrer que P est pair si, et seulement si, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^q a_{2k} X^{2k}$.

(d) Montrer que P est impair si, et seulement si, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$P(X) = \sum_{k=0}^q a_{2k+1} X^{2k+1}.$$

2. Montrer que deux polynômes non nuls impairs ne sont pas premiers entre eux.
3. Déterminer la parité du polynôme dérivé P' en fonction de celle de $P \in \mathbb{K}[X]$.
4. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ deux polynômes pairs, et soit $D = A \wedge B$, le pgcd de A et B .
On rappelle qu'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que : $AU + BV = D$.

(a) Montrer que D divise $\widehat{D}$.

(b) On pose $D(X) = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} b_k X^k$ avec $d = \deg(D)$. Montrer que $\widehat{D} = (-1)^d D$.

(c) On suppose que d est un entier impair. Soit A_1 et B_1 tels que $A = DA_1$ et $B = DB_1$.

i. Montrer que $A_1 \wedge B_1 = 1$.

ii. Montrer que A_1 et B_1 sont deux polynômes impairs.

iii. Dédire une contradiction, puis conclure.

(d) Montrer que si A et B sont deux polynômes impairs alors D est un polynôme impair.

Partie II

On se propose d'étudier la suite de polynômes $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$(*) \quad H_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = XH_n - H'_n,$$

où H'_n désigne le polynôme dérivé de H_n .

1. (a) Calculer H_1 et H_2 .
- (b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est unitaire et de degré n .
- (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n a la même parité que n .
- (d) i. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H'_{n+1} = (n+1)H_n$.
- ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déduire le reste de la division euclidienne de H_{n+1} par H_n .
- iii. Dédire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} \wedge H_n = 1$.
2. Dans cette question on se propose de montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, il existe un unique $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k H_k$, où $n = \deg(P)$.
- (a) Justifier le résultat pour $n = 0$.
- (b) Montrer par récurrence sur le degré de P , l'existence de $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k H_k$. Indication : écrire $X^{n+1} = X.X^n$.
- (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, pour tout $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k H_k = 0 \implies \lambda_k = 0, \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}.$$

(d) En déduire l'unicité de $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k H_k$.

3. On se propose d'étudier les racines de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que si z est une racine complexe de H_n , alors $-z$ est une racine de H_n .

Dans la suite, on montrera par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Supposons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ sont les racines réelles de H_n rangées dans l'ordre croissant. Ainsi,

$$(**) H_n(X) = \prod_{k=1}^n (X - x_k).$$

(b) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $H_{n+1}(x_i) \neq 0$.

(c) Expliciter H_{n+1} en fonction des x_i à partir de (*) et (**) puis déduire que, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $H_{n+1}(x_i)H_{n+1}(x_{i+1}) < 0$.

(d) Déduire que, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe $\alpha_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $H_{n+1}(\alpha_i) = 0$.

(e) Etudier les variations de H_{n+1} sur l'intervalle $[\alpha_{n-1}, +\infty[$, en déduire qu'il existe $\alpha_n > x_n$ tel que $H_{n+1}(\alpha_n) = H_{n+1}(-\alpha_n) = 0$.

(f) Conclure.