

Devoir surveillé N°1

Durée: 1h30

Epreuve: Analyse

Date: 31-10-2023



N. B. Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1 (6 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin(2x) + \cos(x)}{2\sin(x) - 3\cos^2 x + 4}$.

- Justifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. (**Ind.** Poser $t = \sin(x)$).
- Calculer sur $\mathbb{R}$ l'expression de $G(x) = \int g(x) dx$ où $g(x) = \frac{2x+1}{3x^2+2x+1}$.
- En déduire l'expression sur $\mathbb{R}$ de $F(x) = \int f(x) dx$. (**Ind.** Utiliser le changement de variable $t = \sin(x)$).
- On considère l'équation différentielle $(E) : xy'(x) + y(x) = f(x)$ où $y :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue. Déterminer l'unique solution de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $y(\pi) = \frac{\sqrt{2}}{6\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercice 2 (7 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos(x) + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right),$$

- Trouver le domaine de définition D_f de la fonction f .
- Soit la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(0) = \pi$ et $g(x) = f(x)$ si $x \in]0, 1]$.
Montrer que g est continue sur $[0, 1]$.
- En utilisant le changement de variable $x = \cos(\theta)$ où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, déterminer une expression simple de $g(x)$ sur $[0, 1]$.
- (a) Vérifier que g est dérivable sur $]0, 1[$ puis donner l'expression de $g'(x)$.
(b) Retrouver l'expression simplifiée de $g(x)$ sur $[0, 1]$.
- (a) Montrer que $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
(b) Trouver l'ensemble $\Omega = \{x \in [0, \frac{1}{2}], g(2x) = 2\arcsin(x)\}$.

Exercice 3 : (7 points)

Pour tous réels $m, \alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_{m,\alpha}) : (m-1)y''(x) + 2my'(x) + (m+1)y(x) = e^{\alpha x}$$

où $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue.

1. On suppose dans cette question $\alpha = -1$.
 - (a) On suppose dans cette question $m = 0$. Déterminer l'unique solution φ de l'équation différentielle $(E_{0,-1})$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = -\frac{1}{2}$.
 - (b) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, la fonction φ est l'unique solution de l'équation $(E_{m,-1})$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -\frac{1}{2}$.
2. On suppose dans cette question $m = 1$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (a) Déterminer l'unique solution f_α de l'équation $(E_{1,\alpha})$ vérifiant $f_\alpha(0) = 1$.
(Ind. distinguer les deux cas $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$).
 - (b) Trouver la valeur $f'_\alpha(0)$ et vérifier qu'elle est une valeur indépendante de α .
3. Soient $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (a) Résoudre l'équation homogène associée à l'équation $(E_{m,\alpha})$.
 - (b) On suppose dans cette question $\alpha = -1$. Déduire alors l'ensemble des solutions générales de $(E_{m,-1})$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que si toutes les équations $(E_{m,\alpha})$ où m décrit $\mathbb{R}$ admettent une solution commune alors $\alpha = -1$. (Ind. utiliser les équations $(E_{0,\alpha})$ et $(E_{1,\alpha})$).

Bon travail

