

Examen de Fin du 1^{er} Semestre de Physique

– L'usage des calculatrices est autorisé.

– Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.

N. B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.



Exercice 1

L'axe vertical (Oz) est matérialisé par un fil fin sur lequel peut coulisser sans frottement une très petite bille M , de masse m , portant la charge électrique positive q . Le champ de pesanteur est défini par $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Un cerceau de rayon R et d'axe (Oz), portant une charge électrique positive répartie uniformément sur sa circonférence, crée un champ électrique dont on admettra l'expression sur l'axe (Oz) :

$$\vec{E}(z) = \alpha \cdot \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z, \text{ ; où } \alpha \text{ est une constante positive.}$$

- 1) Exprimer la valeur algébrique $F(z)$ de la force électrostatique $\vec{F}(z) = F(z)\vec{e}_z$ subie par la petite sphère. Sur un schéma, présenter la bille M , le cerceau ainsi que les forces appliquées sur M .
- 2) Tracer l'allure de variation de $F(z)$.
- 3) En tenant compte du poids de la sphère, montrer qu'il y a deux positions d'équilibre pour la petite bille avec une condition que l'on déterminera.
- 4) Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $E_{\text{pes}}(z)$.
- 5) Exprimer l'énergie potentielle $E_{\text{el}}(z)$ associée à l'effort électrostatique.
- 6) Déduire l'énergie potentielle totale $E_p(z)$ associée à ce mouvement (on choisit $E_p(0) = 0$).

- 7) Tracer les allures des énergies potentielles $E_{\text{pes}}(z)$ et $E_{\text{él}}(z)$. Déduire celle de l'énergie potentielle totale $E_p(z)$.
- 8) Discuter la stabilité des positions d'équilibre.
- 9) Discuter suivant l'énergie totale, les états libres et les états liés de M en fonction de z.

Exercice 2

La terre est assimilable à une sphère homogène de centre O, de masse M et de rayon R. Le champ de gravitation créé par la terre en tout point A de l'espace situé à une distance r du centre O est : $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$; G la constante de gravitation universelle et $\vec{u} = \frac{\vec{OA}}{OA}$.

Un satellite S de masse m décrit d'un mouvement uniforme selon une orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. Le mouvement est rapporté au repère géocentrique, ayant comme origine le centre de la Terre, et on suppose que S est soumis à la seule action du champ de gravitation terrestre.

On donne : La masse de la terre $M = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg ; la constante de gravitation $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ (SI), le rayon de la terre $R = 6.4 \cdot 10^6$ m.

- 1) Trouver la valeur du pesanteur terrestre au sol g_0 .
- 2) Exprimer la vitesse V du satellite en fonction de g_0 , R et r , r étant plus grand que R.
- 3) Déduire l'expression de la période T du mouvement. Calculer T pour une altitude de 1000 km.
- 4) A partir du travail élémentaire $dw = \vec{f} \cdot d\vec{r}$ de la force de gravitation exercée par la Terre sur le satellite, montrer que le travail de la force $\vec{f}$, lors de son déplacement du sol jusqu'à une position de rayon r est donné par :

$$w = mg_0 R^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

- 5) En déduire l'expression de l'énergie potentielle du satellite en fonction de g_0 , m , r et R . On choisira le niveau du sol comme état de référence pour l'énergie potentielle.

- 6) Exprimer l'énergie cinétique de S en fonction de m , g_0 , r et R . Dédire l'expression de l'énergie mécanique totale.

Il se produit une très faible variation dr du rayon, de telle sorte que la trajectoire puisse être considérée comme circulaire.

- 7) Exprimer la variation dV de la vitesse qui en résulte et montrer que : $dV = -\frac{\pi}{T} dr$.
- 8) Dédire la variation de l'énergie cinétique lors d'un déplacement radial élémentaire dr .
Faire l'application numérique pour $dr = 1$ km et un satellite de masse $m = 350$ kg.

Exercice 3

Soit $R_0(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un référentiel supposé galiléen. Soit $(O, \vec{k})$ l'axe vertical ascendant. Un cerceau de centre C et de rayon a est articulé au point A qui se déplace à la vitesse constante V_0 tel que $\overrightarrow{OA} = V_0 t \vec{k}$.

De plus, le cerceau est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe $(O, \vec{k})$ avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = w \vec{k}$ de manière que ce cerceau reste dans le plan horizontal (xOy) ; voir figure. Soit le vecteur unitaire $\vec{i}'$ du référentiel mobile $R(C, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k})$ lié au cerceau. Une bille assimilée à un point matériel M de masse m glisse sans frottement à l'intérieur du cerceau. Sa position est repérée par l'angle $\theta = (\vec{i}', \vec{u}_r)$ tel que $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est la base polaire rapportée au mouvement relatif de M ; voir figure.

On étudiera le mouvement de M dans le référentiel relatif R et on exprimera tous les vecteurs dans la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.

- 1) Déterminer les vecteurs vitesses relative et d'entraînement de M .
- 2) Déterminer les vecteurs accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis du mobile M .

- 3) Quelles sont les forces agissant sur la bille M. Les identifier.
- 4) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation différentielle qui gouverne le mouvement de M dans R ainsi que les composantes de la force de réaction.
- 5) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à l'origine C de R, retrouver l'équation différentielle qui gouverne le mouvement de M dans R.
- 6) Calculer le travail des forces exercées lors d'un tour complet de la bille M dans le cerceau. Que peut-on déduire.
- 7) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle totale puis celle de l'énergie mécanique de M.
- 8) Retrouver de nouveau l'équation différentielle du mouvement de M.
- 9) Trouver, s'il existe, les positions d'équilibre de M dans le référentiel relatif R. Discuter leur stabilité.

