

Devoir de Contrôle d'Algèbre N°2

Section: MP1

Durée: 1:30h

Date: Mars 2024

Nbre de pages: 2

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème :**Notations et définitions :**

- Dans tout le sujet, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Une **homothétie de rapport** $\lambda \in \mathbb{K}$ désigne l'endomorphisme λid_E .
- Tout au long du sujet, on désigne par f un endomorphisme de E et par $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E .
- On rappelle que $f^0 = id_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f$.
- On rappelle que **trace** de f notée $tr(f)$ est égale à la trace de sa matrice associée dans une base de E .
- Il est à signaler que cette quantité ne dépend pas du choix de la base.
- On dit que f est **nilpotent d'indice de nilpotence** $p \in \mathbb{N}^*$, si $f^p = \tilde{0}$ et $f^{p-1} \neq \tilde{0}$.
- Soit $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On définit la **valeur du polynôme P en l'endomorphisme f** par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^N a_k f^k \in \mathcal{L}(E).$$

Par exemple : si $P = 2X^2 + X + 1$, on obtient $P(f) = 2f^2 + f + id_E \in \mathcal{L}(E)$.

- Un endomorphisme g de E est dit **polynôme en f** , s'il existe un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $g = P(f)$.
- On pose $\mathbb{K}[f] = \{P(f) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ l'ensemble des endomorphismes polynômes en f .

Il est à noter que $\mathbb{K}[f]$ est un sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$.

- Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de f si $P(f) = \tilde{0}$.

Par exemple : si f est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $X - \lambda$ est un polynôme annulateur de f .

- On pose $\mathcal{I}(f) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = \tilde{0}\}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de f .

Il est à noter que $\mathcal{I}(f)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{K}[X]$.

- Pour tous polynômes P, Q de $\mathbb{K}[X]$ et tout scalaire α de $\mathbb{K}$, on admet les résultats suivants :

- ◇ $(\alpha P + Q)(f) = \alpha P(f) + Q(f)$.
- ◇ $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Partie I : Préliminaires

On note

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P &\longmapsto P(f) \end{aligned}$$

1. Montrer que Ψ est une application linéaire.
2. Montrer que $\ker \Psi = \mathcal{I}(f)$ et que $\text{Im} \Psi = \mathbb{K}[f]$.
3. En déduire que $\mathcal{I}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

4. Montrer que pour tout polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ et tout polynôme P de $\mathcal{I}(f)$, $PQ \in \mathcal{I}(f)$.
5. Justifier que $\mathbb{K}[f]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
6. Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{K}[f]$. Montrer que u et v commutent.

Partie II : Étude de $\mathcal{I}(f)$

1. Dans cette question, on se propose de montrer que $\mathcal{I}(f) \neq \{0\}$.
 - (a) Justifier que la famille $(id_E, f, \dots, f^{n^2})$ est liée de $\mathcal{L}(E)$.
 - (b) En déduire qu'il existe un polynôme P **non nul** de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de f .
 - (c) L'application Ψ est-elle injective?
2. On note $\mathcal{D} = \{\deg P \mid P \in \mathcal{I}(f) \setminus \{0\}\}$.
 - (a) Justifier que $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$.
 - (b) En déduire qu'il existe un unique polynôme **unitaire** noté Π_f de $\mathcal{I}(f)$ vérifiant

$$(*) \quad \deg \Pi_f = \min \mathcal{D}.$$

Π_f est appelé le **polynôme minimal** de f .

- (c) Soit R un polynôme annulateur de f de degré strictement inférieur au degré de Π_f . Montrer que R est nul.
3. Soit P un polynôme de $\mathcal{I}(f)$. Montrer que Π_f divise P .

► On vient de montrer que Π_f est l'unique polynôme **unitaire**, **annulateur** de f et **divisant tout autre polynôme annulateur** de f .

Partie III : Polynôme minimal de quelques endomorphismes

1. Déterminer le polynôme minimal Π_f de f dans les cas suivants :
 - (a) f est une homothétie de rapport λ .
 - (b) f est un projecteur différent de $\tilde{0}$ et id_E .
 - (c) f est une symétrie différente de $\pm id_E$.
 - (d) f est nilpotent d'indice de nilpotence $p \in \mathbb{N}^*$.
2. On se donne f un endomorphisme de E de rang 1.
 - (a) Justifier qu'il existe un vecteur non nul a de E tel que $E = \ker f \oplus \text{vect}(a)$.
 - (b) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ **non tous nuls** tels que la matrice A de f selon la base $\mathcal{B}$ ait la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

- (c) Montrer que $f^2 = \text{tr}(f) f$.
- (d) En déduire que $\Pi_f = X(X - \text{tr}(f))$.

Partie IV : Application au calcul de la dimension de $\mathbb{K}[f]$

On note d le degré de Π_f le polynôme minimal de f .

1. Montrer que $(id_E, f, \dots, f^{d-1})$ est une famille libre de $\mathbb{K}[f]$.
2. Soit g un élément de $\mathbb{K}[f]$. Montrer qu'il existe des scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que $g = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k f^k$.
3. Déduire que $(id_E, f, \dots, f^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$ et déterminer sa dimension.
4. *Application* : On dit que f est **cyclique** s'il existe $a \in E$ tel que $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E .

Dans cette question, f est un endomorphisme cyclique.

- (a) Montrer que $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathbb{K}[f]$.
- (b) En déduire que Π_f est un polynôme de degré supérieur ou égal à n .

- (c) Justifier qu'il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ des scalaires de $\mathbb{K}$ tels que $f^n(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(a)$.

- (d) Démontrer alors que $f^n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$.

- (e) En déduire que $\Pi_f = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$. Quelle est alors la dimension de $\mathbb{K}[f]$? Que peut-on conclure quant à la surjectivité de l'application Ψ ?