

Examen d'Algèbre - Semestre N°2

Section : M.P.1

Durée : 2 Heures

Date : Mai 2024

Exercice 1

Soit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ par $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^2 P(i)Q(i)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. En déduire que $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace euclidien.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $\|P\| = \sqrt{\langle P, P \rangle}$ la norme déduite du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
2. Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ n'est pas orthonormée.
3. En appliquant le procédé de Gram-schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2

E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Pour tous vecteurs u, v de E , on note

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle \end{pmatrix} \text{ et } g(u, v) = \det(G(u, v)).$$

1. (a) Montrer que pour tous $u, v \in E$ on a $g(u, v) \geq 0$.
(b) Déduire que $g(u, v) = 0$ si et seulement si u et v sont colinéaires.
2. Pour tous vecteurs u, v, w de E , on note

$$G(u, v, w) = \begin{pmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle & \langle u, w \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, u \rangle & \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{pmatrix} \text{ et } g(u, v, w) = \det(G(u, v, w)).$$

- (a) On suppose que la famille (u, v, w) est orthonormée. Déterminer $G(u, v, w)$ et $g(u, v, w)$.
- (b) On suppose que w est orthogonale à u et à v . Exprimer $g(u, v, w)$ en fonction de $g(u, v)$.

- (c) On suppose que (u, v, w) est libre. Soit (u_1, u_2, u_3) une famille orthonormée déduite de (u, v, w) par le procédé de Gram-schmidt. Montrer qu'il existe $t \in \text{vect}(u, v)$ et un vecteur x orthogonale à $\text{vect}(u, v)$ tels que $w = t + x$
- (d) Dédire que $g(u, v, w) = g(u, v) \|x\|^2$.
- (e) Etablir que (u, v, w) est libre si et seulement si $g(u, v, w) \neq 0$.

Problème

Pour un entier naturel $n \geq 2$, $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées réelles de taille n , de matrice unité I_n .

Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ on rappelle que $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

soit J une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\text{tr}(J) \neq -1$. Soit ψ_J l'application qui, à toute matrice M associe la matrice

$$\psi_J(M) = M + \text{tr}(M)J.$$

Partie I

- (a) Montrer que l'application tr est une forme linéaire surjective sur $M_n(\mathbb{R})$.
(b) Dédire que $\ker(\text{tr})$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que ψ_J est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
- (a) pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, expliciter $\text{tr}(\psi_J(M))$ en fonction de $\text{tr}(M)$ et $\text{tr}(J)$.
(b) Déterminer $\ker(\psi_J)$.
(c) Dédire que ψ_J est un isomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
(d) Montrer que $\ker(\text{tr}) \oplus \text{vect}\{J + \frac{1}{n}I_n\} = M_n(\mathbb{R})$.

Partie II

on considère l'ensemble $\Delta(\psi_J)$ définie par :

$$\Delta(\psi_J) = \{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \psi_J - \lambda \text{id}_{M_n(\mathbb{R})} \text{ n'est pas injectif}\}.$$

- Montrer que $\lambda \in \Delta(\psi_J)$ si et seulement si, il existe une matrice non nulle M telle que $\psi_J(M) = \lambda M$.
Dans les questions 2 et 3 on prend $J = I_n$.
- (a) Trouver une matrice non nulle $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\psi_{I_n}(A) = A$.
(b) Trouver une matrice non nulle $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\psi_{I_n}(B) = (n+1)B$.
(c) Dédire que $\{1, n+1\} \subset \Delta(\psi_{I_n})$.
(d) Montrer que si $\lambda \notin \{1, n+1\}$ alors l'endomorphisme $\psi_{I_n} - \lambda \text{id}_{M_n(\mathbb{R})}$ est injectif.
(e) Dédire que $\{1, n+1\} = \Delta(\psi_{I_n})$.
- (a) Déterminer $E_1 = \ker(\psi_{I_n} - \text{id}_{M_n(\mathbb{R})})$. En déduire que E_1 est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$.
(b) Montrer que $E_2 = \ker(\psi_{I_n} - (n+1)\text{id}_{M_n(\mathbb{R})}) = \text{vect}\{I_n\}$.
(c) En déduire que $E_1 \oplus E_2 = M_n(\mathbb{R})$.
- (a) Calculer $\psi_J(J)$.
(b) En déduire que $\Delta(\psi_J) = \{1, 1 + \text{tr}(J)\}$