

Devoir de contrôle du 2^{ème} semestre en Analyse

Date: 12/03/2024 _____ Durée: 1h30 _____ Nombre de pages: 2

N.B Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Problème 1 (10 points)

- On considère la fonction $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $f(x) = x^2 + \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

§ Partie 1

- Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et déterminer l'expression de $f'(x)$.
 - Trouver le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
- Vérifier que f admet un prolongement par continuité en -1 noté g que l'on précisera.
 - Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, +\infty[$.
- Soient l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et la fonction $h = f|_I$: restriction de f sur I .
 - Montrer que: $\forall x \in I, h'(x) > 0$ puis déduire que h réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera.
NB On note h^{-1} la réciproque de cette bijection et on ne demande pas de déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$.
 - Justifier que h^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J puis qu'elle admet un développement limité en 0 à l'ordre 3 que l'on déterminera.
 - Donner l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ de h^{-1} au point $A(0,0)$ et préciser la position de $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ par rapport à T au voisinage de A .
 - Déterminer pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, la valeur de $(f^{-1})^{(k)}(0)$.

§ Partie 2

- On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{k}{n^2 + k}\right)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel $c_k \in \left]0, \frac{k}{n^2}\right[$ tel que

$$\arctan\left(\frac{k}{n^2 + k}\right) - \frac{k}{n^2} = \left(\frac{f''(c_k)}{2} - 1\right) \frac{k^2}{n^4}.$$

- Justifier qu'il existe un réel $M_0 > 0$ tel que: $\forall x \in [0, 1], |f''(x)| \leq M_0$.

- En déduire qu'il existe un réel $M > 0$ tel que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|U_n - \frac{n+1}{2n}\right| \leq M \frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}$.

NB On rappelle que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Déduire alors que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

Problème 2 (10 points)

- On note $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

§ Partie 1

Dans cette partie, on considère une fonction $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ et on se propose de montrer que f vérifie la propriété $(\star)$ suivante:

$$(\star): \forall a, b \in \mathbb{R}; a < b, \exists c = c_{a,b} \in]a, b[\text{ tel que: } f(b) = f(a) + (b-a)f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24}f^{(3)}(c).$$

Pour cela, soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et posons: $M = \frac{1}{(b-a)^3} \left(f(b) - f(a) - (b-a)f'(\frac{a+b}{2}) \right)$.

On considère la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $F(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(\frac{a+x}{2}) - M(x-a)^3$.

- (1) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $F'(x)$ en fonction des fonctions f' et f'' .

- (2) Montrer qu'il existe un réel $\lambda \in]a, b[$ tel que $F'(\lambda) = 0$.

- (3) Soit la fonction $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $G(x) = f'(\lambda) - f'(\frac{\lambda+x}{2}) + \frac{x-\lambda}{2}f''(\frac{\lambda+x}{2}) - 3M(x-\lambda)^2$.

- (a) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $G'(x)$ en fonction des fonctions f'' et $f^{(3)}$.

- (b) Montrer qu'il existe un réel $\beta \in]a, \lambda[$ tel que $G'(\beta) = 0$.

- (c) En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $M = \frac{1}{24}f^{(3)}(c)$ et que f vérifie la propriété $(\star)$.

§ Partie 2

- (1) On note Ω l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall h \in \mathbb{R}, f(x+h) = f(x) + hf'(x + \frac{h}{2}).$$

Supposons que $\Omega \neq \emptyset$ et soit $f \in \Omega$.

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la propriété $(\star)$, montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel

$$\alpha_n \in]x, x + \frac{1}{n}[\text{ tel que } f^{(3)}(\alpha_n) = 0.$$

NB On admet qu'une telle suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.

- (b) En déduire que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

- (c) Déduire alors l'ensemble Ω .

- (2) On note Γ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ telles que:

$$\exists \theta \in]0, 1[; \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall h \in \mathbb{R}, f(x+h) = f(x) + hf'(x + \theta h).$$

Supposons que $\Gamma \neq \emptyset$ et soient $f \in \Gamma$ et $x \in \mathbb{R}$.

- (a) En utilisant la propriété $(\star)$, montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $U_n \in]x, x + \frac{1}{n}[$ tel que

$$f'(x + \frac{\theta}{n}) = f'(x + \frac{1}{2n}) + \frac{1}{24n^2}f^{(3)}(U_n).$$

NB On admet qu'une telle suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.

- (b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel

$$V_n \in]x, x + \frac{1}{n}[\text{ tel que } (\theta - \frac{1}{2})f''(V_n) = \frac{1}{24n}f^{(3)}(U_n).$$

NB On admet qu'une telle suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.

- (c) Déduire alors l'ensemble Γ .

Bon travail