

Devoir de synthèse N°2

Durée: 2h

Epreuve: Analyse

Date: 17-05-2024

N. B. Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Dans tout le sujet I désigne l'intervalle fermé $[1, +\infty[$.

Etant donné une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , on désigne par $T_{|f|} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie sur I par : $\forall x \in I, T_{|f|}(x) = \int_1^x |f(t)| dt$.

On dit f est **intégrable** sur I si et seulement si la fonction $T_{|f|}$ admet une limite finie dans $\mathbb{R}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

N.B : Il est clair que f est intégrable sur I si et seulement si $|f|$ est intégrable sur I .

Partie 1.

1. (a) Justifier que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur I .
- (b) Soit $x \in I$. Calculer l'expression de $\int_1^x \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ puis déduire que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$ est intégrable sur I .
- (c) Soit $x \in I$. Calculer l'expression de $\int_1^x \frac{2t+3}{t^2+2t+2} dt$ puis déduire que la fonction $t \longmapsto \frac{2t+3}{t^2+2t+2}$ n'est pas intégrable sur I .
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (a) Soit $x \in I$. Déterminer suivant les valeurs de α , l'expression de $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$.
- (b) En déduire que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur I si et seulement si $\alpha > 1$.

Partie 2.

1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et **positive** sur I .
- (a) Vérifier que la fonction T_f est croissante sur I .
- (b) Montrer que f est intégrable sur I si et seulement si T_f est majorée sur I .
- (c) Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive sur I vérifiant :

$$\exists a \geq 1 \text{ tel que } \forall t \geq a, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$$

Déduire si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I .

- (d) **Application** : Montrer que la fonction $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ n'est pas intégrable sur I .

2. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I .
 - (a) Montrer que si $f = O(g)$ et que g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I .
 - (b) On suppose que $f \sim_{+\infty} g$. Montrer que f est intégrable sur I si et seulement si g est intégrable sur I .
 - (c) **Application** : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier suivant les valeurs de α , l'intégrabilité sur I de la fonction $\phi : t \mapsto \frac{\arctan(t)}{(1+t)^\alpha}$.

Partie 3.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue **positive** sur I .

1. Prouver que f est intégrable sur I si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} (T_f(n+1) - T_f(n))$ est convergente.
2. On suppose dans cette question que f est **décroissante**.
 - (a) Justifier que $\forall n \geq 1, f(n+1) \leq T_f(n+1) - T_f(n) \leq f(n)$.
 - (b) En déduire que f est intégrable sur I si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ est convergente.
 - (c) Déduire la nature de convergence des séries suivantes : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln^2(n)}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.

Partie 4.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur I et $T_f : I \rightarrow \mathbb{K}$ qui à $x \mapsto T_f(x) = \int_1^x f(t) dt$.
 On se propose de montrer que si f est intégrable sur I , alors la fonction $x \mapsto T_f(x)$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
 On pose pour tout $x \in I$, $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ et on rappelle que $\forall x \in I, f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et que $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.
 - (a) En utilisant la partie 2, la question 1) c), montrer que si f est intégrable sur I alors les fonctions f^+ et f^- sont intégrables sur I .
 - (b) En déduire que si f est intégrable sur I alors la fonction $x \mapsto T_f(x)$ admet une limite finie dans $\mathbb{R}$ quand $x \rightarrow +\infty$.
2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
 - (a) Montrer que si f est intégrable sur I alors les deux fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont intégrables sur I .
 - (b) En déduire que si f est intégrable sur I alors la fonction $x \mapsto T_f(x)$ admet une limite finie dans $\mathbb{C}$ quand $x \rightarrow +\infty$.
3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie sur I par : $\forall x \in I, f(x) = \frac{e^{ix}}{x}$.
 - (a) Vérifier que f n'est pas intégrable sur I .
 - (b) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que la fonction $x \mapsto T_f(x)$ admet une limite finie dans $\mathbb{C}$ quand $x \rightarrow +\infty$.
 - (c) Conclure.