DEVOIR DE SYNTHESE SEMESTRE 2

Matière : INFORMATIQUE

Classes : MP 1, PC 1, PT 1 – Durée : 2 h

Les fonctions demandées doivent être écrites en langage ***Python****. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code.*

Exercice 1 (6 pts)

1) On sait que $167^2 = 27\mathbf{889}$ et $333^2 = 110\mathbf{889}$, on se propose de chercher tous les nombres entiers n avec $100 \leq n \leq 10000$ tel que les trois derniers chiffres de n^2 sont égaux à $\mathbf{889}$.
Ecrire une fonction itérative $nombre()$ qui renvoie une liste contenant tous les entiers qui ont cette propriété.

2) Un nombre palindrome est un entier symétrique, dans le sens où il peut être lu de droite à gauche comme de gauche à droite, en restant égal à lui-même.

Ecrire une fonction $palindrome(n)$ qui prend en argument un entier positif n et renvoie *True* si n est palindrome et *False* sinon.

Nota : on peut convertir le nombre n en chaînes de caractères.

3) Ecrire une fonction itérative $solve(n)$ qui prend en argument un entier positif n et détermine le plus petit entier $k \geq n$ qui multiplié par son écriture inversée est un palindrome.

Par exemple, si $n = 2018$ alors $k = 2021$ car $2021 \times 1202 = 2429242$ qui est un nombre palindrome sans que ce soit vrai pour k parmi $2018, 2019$ ou 2020.

4) On se propose de calculer l'expression définie par (1), où x est un réel positif et la racine carrée est répétée n fois :

$$(1) \quad \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\quad \ldots \quad +\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}}}_{n\ fois}$$

Ecrire une fonction itérative $calcul(x, n)$ qui prend en argument un réel positif x et un entier positif n et renvoie la valeur de l'expression (1).

IPEIS-BIB

Exercice 2 **(6 pts)**

La suite de Recaman est une suite d'entiers naturels définie par la récurrence suivante :

- $a_0 = 0$
- Pour tout entier $n > 0$:

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} - n & si\ a_{n-1} > n\ et\ si\ (a_{n-1} - n)\ n'apparaît\ pas\ déjà\ dans\ la\ suite \\ a_{n-1} + n & sinon \end{cases}$$

Les premiers termes de la suite sont :

0, 1, 3, 6, 2, 7, 13, 20, 12, 21, 11, 22, 10, 23, 9, 24, 8, 25, 43, 62, 42, 63, 41, 18, ...

1) Ecrire une fonction itérative $recaman(n)$ qui prend en argument un entier positif n et renvoie une liste comportant n termes de la suite (y compris le premier terme a_0).

On se propose d'enregistrer les termes de la suite dans un fichier texte tel que, chaque ligne du fichier contient 8 termes séparés par une virgule, comme dans l'extrait suivant :

```
0, 1, 3, 6, 2, 7, 13, 20
12, 21, 11, 22, 10, 23, 9, 24
8, 25, 43, 62, 42, 63, 41, 18
...
```

2) Ecrire une fonction $stockage(nom, n)$ qui prend en argument un nom de fichier et un entier n et enregistre n termes de la suite dans un fichier texte conformément à l'extrait ci-dessus.

3) Ecrire une fonction $graphe(n)$ qui prend en argument un entier n et permet de tracer la courbe représentative de la suite en définissant les listes suivantes :

- X composée par les entiers i variant de 0 à $n-1$,
- Y contenant les termes de la suite a_i et ce pour i variant de 0 à $n-1$.

Exercice 3 **(4 pts)**

1) La matrice de Wilkinson est une matrice carrée W de taille n (n impair) est définie par :

- $W_{i,i} = \lfloor n/2 \rfloor - i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$
- $W_{i,i+1} = W_{i+1,i} = 1$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$
- $W_{i,j} = 0$ pour $|j - i| > 1$

où $\lfloor\ \rfloor$ représente la partie entière.

Exemple, pour $n = 5$, la matrice W est :

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ecrire une fonction $Wilkinson(n)$ qui prend en argument un entier positif n et renvoie la matrice de Wilkinson sous forme de tableau $numpy$.

IPEIS-PIP

Nota : Le module $numpy$ permet d'obtenir la fonction partie entière par la commande $numpy.floor()$

2) Soit X une matrice carrée de taille n, on définit l'exponentielle de X, notée e^X ou $exp(X)$, par la série convergente suivante :

$$e^X = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{X^m}{m!}$$

où X^0 est définie comme étant la matrice identité I de même taille n que X et X^m est le produit matriciel répété de X avec lui-même ($X^2 = XX, X^3 = X^2X$, ...).

Ecrire une fonction itérative $expo(X, k)$ qui prend en argument une matrice carrée X sous forme de tableau $numpy$ et un entier positif k et renvoie l'exponentielle de X approximative donnée par la somme de $k + 1$ termes de la série précédente, comme suit :

$$e^X \cong I + \frac{X}{1} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots + \frac{X^k}{k!}$$

Le résultat renvoyé par la fonction est une matrice carrée de même taille que X, sous forme de tableau $numpy$.

IPEIS-BIB

Exercice 4 (4 pts)

Les polynômes de Chebyshev de première espèce sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$T(n,x) = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ x & si\ n = 1 \\ 2\,x\,T(n-1,x) - T(n-2,x) & sinon \end{cases}$$

où n est un entier positif $n \geq 0$ et x un réel.

1) Ecrire une fonction récursive $Chebyshev(n, x)$ qui prend en argument un entier n et un réel x et renvoie la valeur réelle du polynôme $T(n, x)$.

2) Ecrire une fonction $graphe()$ qui permet de tracer les courbes représentatives des polynômes $T(2, x)$ et $T(3, x)$ en définissant les tableaux suivants :

- X composé par les réels x variant de $-1 \leq x \leq 1$, avec une subdivision régulière de 100 points
- $Y1$ contenant 100 valeurs réelles du polynôme $T(2, x)$ avec $x \in X$.
- $Y2$ contenant 100 valeurs réelles du polynôme $T(3, x)$ avec $x \in X$.