

Examen d'Analyse N°1
MP 1

Date : 21/12/2024

Durée : 2 heures

Nombre de pages : 2

N.B. *Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.*EXERCICE (6pts)Soit $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On considère la fonction φ_p définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi_p(x) = x + x^2 + \dots + x^p.$$

1. On fixe un entier
- p
- dans
- $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
- .

En étudiant la fonction φ_p , montrer que l'équation $\varphi_p(x) = 1$ possède une unique solution positive x_p .

2. Soit
- $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
- .

(a) Justifier que : $x_p \in]0, 1[$.(b) Établir que : $x_p(1 - x_p^p) = 1 - x_p$.

3. Montrer que la suite
- $(x_p)_{p \geq 2}$
- est décroissante et déduire qu'elle est convergente.

4. (a) Montrer que la suite
- $(x_p^p)_{p \geq 2}$
- converge vers 0.

(b) En déduire la limite de la suite $(x_p)_{p \geq 2}$.PROBLÈME (14 pts)

Partie I : Deux questions préliminaires

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que l'application
- $\text{th} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$
- est une bijection de
- $\mathbb{R}$
- sur
- $] -1, 1[$

et que sa fonction réciproque G est définie par : $\forall x \in] -1, 1[, \quad G(x) = \ln \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$.

2. Montrer que pour tout
- $x \in \mathbb{R}$
- ,
- $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$
- .

Partie II : Résolution d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables (donc continues) en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

1. Vérifier que les fonctions constantes éléments de $\mathcal{E}$ sont celles égales à 0, à 1 et à -1 .
2. On suppose que $f \in \mathcal{E}$. Donner les valeurs possibles de $f(0)$.
3. Montrer que si $f \in \mathcal{E}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$$

(on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$).

4. Montrer que si $f \in \mathcal{E}$, alors $(-f) \in \mathcal{E}$.
5. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{E}$, que $f(0) = 1$, et que f n'est pas constante.

Soit alors $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$, et on définit la suite (u_n) en posant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.

- (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.
 - (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2u_{n+1}}{1 + u_{n+1}^2}$; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0 .
 - (c) Notons que $u_0 \in [-1, 1]$. En utilisant ce qui précède, aboutir à une contradiction (on distinguera deux cas : $u_0 \in [-1, 0[$ et $u_0 \in [0, 1]$). En déduire l'ensemble des fonctions f éléments de $\mathcal{E}$ telles que $f(0) = 1$.
 - (d) Que peut-on conclure si l'hypothèse " $f(0) = 1$ " est remplacée par l'hypothèse " $f(0) = -1$ " ?
6. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{E}$, et que $f(0) = 0$.

Ici on peut montrer mais on admet que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 1$ et $f(x) \neq -1$.

On définit alors la fonction g en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = G(f(x))$ où G est la fonction introduite dans la question 1. de la partie I.

- (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$.
- (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite (v_n) en posant : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

Etablir que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite.

- (c) Montrer que la suite (v_n) est constante, puis déduire que g est linéaire (c-à-d, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = \alpha x$).

7. Synthèse : Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

Bon travail.