

Examen de Fin du 1^{er} Semestre de Physique

– L'usage des calculatrices est autorisé.

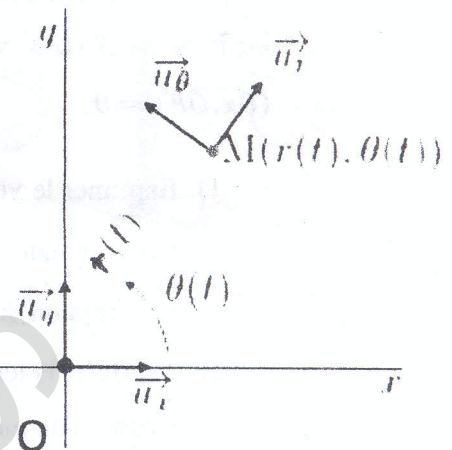
– Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.

N. B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Problème 1:

Dans un référentiel R galiléen lié au repère (Oxyz), un point matériel M de masse m peut se déplacer librement dans tout l'espace. Il subit une unique force $\vec{f}$, force centrale dérivant de l'énergie potentielle $E_p(r) = \frac{1}{2} kr^2$ où k est une constante positive et r la distance OM. En coordonnées cartésiennes, les conditions initiales sont les suivantes :

$$x(0) = a > 0, y(0) = z(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0, \dot{y}(0) = v_0 > 0.$$



- 1) Déterminer la force $\vec{f}$ et exprimer-la en fonction du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- 2) Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ de M en O se conserve, et déterminer sa valeur avec les conditions initiales. En déduire que le mouvement est situé dans un plan que l'on précisera.
- 3) Montrer que l'énergie mécanique E_m de M se conserve, et déterminer sa valeur.
- 4) Déduire alors de la conservation de l'énergie une équation liant $r, \dot{r}$ et les constantes m, a, v_0 et k .

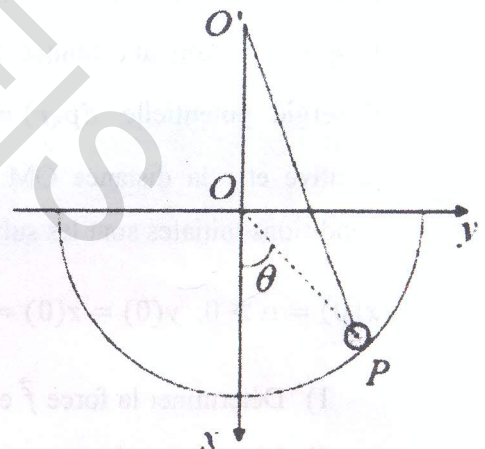
- 5) Définir l'énergie potentielle effective d'un point matériel M. Montrer, à partir de diagramme de l'énergie, que le mouvement s'effectue, en général, entre deux valeurs limites $r_{\min}$ et $r_{\max}$ dont on donnera l'expression.
- 6) En utilisant le PFD, déterminer les équations horaires cartésiennes $x(t)$ et $y(t)$ de M. En déduire la nature exacte de la trajectoire puis la représenter sur un schéma.

Problème 2:

Soit un référentiel R de repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Une bille assimilée à un point P, de masse m, est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle de rayon a (Figure ci-dessous).

Le point P est attaché à un fil élastique, assimilé à un ressort de raideur k, dont l'autre extrémité est fixée en O' ($OO' = a$). Le fil possède une longueur à vide l_0 . Le point P est repéré par l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP}) = \theta$.

- 1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{O'P}$ en fonction de a, θ dans la base polaire, $(\vec{u}_r = \overrightarrow{OP}/a, \vec{u}_\theta)$. En déduire l'expression du module $\overrightarrow{O'P}$.
- 2) Exprimer la tension $\vec{T}$ du fil en fonction de a, k, l_0 et θ dans cette même base.
- 3) Déterminer l'expression des vecteurs vitesse $\vec{V}$ et accélération $\vec{A}$ dans la base polaire.
- 4) On note $\vec{F}$ la résultante des forces exercées sur la bille P. Donner l'expression de la puissance $\vec{F} \cdot \vec{V}$ en fonction de a, θ et $\dot{\theta}$. En déduire l'énergie potentielle E_p dont dérive la force $\vec{F}$.
- 5) On suppose vérifiées les relations suivantes entre les paramètres : $a = \frac{2mg}{k}$ et $l_0 = \sqrt{3} \left(a - \frac{mg}{k} \right)$. Quelles sont les positions d'équilibre θ_1 et θ_2 de la bille P. Étudier la stabilité de ces positions d'équilibre.

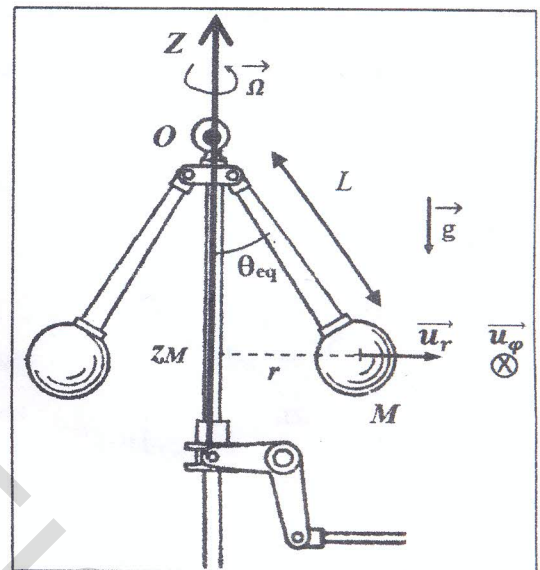


Problème 3:

Le régulateur de Watt est un système ingénieux mis en place dans des machines pour réguler leur vitesse : plus la machine tourne vite et plus les boules du régulateur se soulèvent, actionnant une valve qui diminue l'arrivée de combustible, faisant ainsi diminuer la vitesse de rotation. Dans un référentiel R de repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, le régulateur est placé à l'instant initial tel que les tiges portant les boules sont de direction verticale. Lors de son mouvement, le régulateur reste lié à un référentiel tournant $R'(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$.

Dans ce problème, la boule M de masse m assimilée à un point matériel M , lié par une tige rigide de longueur L à un axe (Oz) qui tourne avec un vecteur rotation constant $\vec{\Omega}_{R'/R} = \omega \vec{e}_z$. M se trouve à la distance r de Oz et $\varphi = \omega t$.

On prendra l'origine $z = 0$ de l'axe Oz à l'accroche de la tige.



- 1) Calculer la vitesse et l'accélération d'entraînement de la boule M .
- 2) Identifier les forces qui agissent sur la boule M dans le référentiel mobile $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$.

Indiquer celles qui sont de nature conservative.

- 3) Quelle est l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement? On l'exprimera en fonction de θ , L , ω et m .
- 4) Exprimer l'énergie potentielle totale de M en fonction de θ , L , ω et m .
- 5) Trouver les possibles positions d'équilibre. En déduire l'altitude z_M de M qui correspond à un état d'équilibre stable.

