

Devoir de contrôle d'Algèbre N°2

Section: MP 1

Durée: 1h30

Date: 1 Mars 2025

Nbre de pages: 3

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème :**Notations et définitions :**

- Dans tout le sujet, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note tM la transposée de M . En outre, on désigne par $0_{n,p}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Tout au long du sujet, on désigne par A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On définit le noyau de A par $\ker A = \{V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AV = 0_{n,1}\}$.
- Soit $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On définit la valeur du polynôme P en la matrice A par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^N a_k A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Par exemple : si $P = 2X^2 + X + 1$, on obtient $P(A) = 2A^2 + A + I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- En particulier, pour un polynôme donné P de $\mathbb{K}[X]$, on obtient

$$\ker P(A) = \{V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid P(A)V = 0_{n,1}\}.$$

- Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de A si $P(A) = 0_n$.

Par exemple : si $A^2 - 2A + 3I_n = 0_n$, alors $X^2 - 2X + 3$ est un polynôme annulateur de A .

- On admet qu'il existe un unique polynôme Π_A , appelé **polynôme minimal** de A , vérifiant :

- ◊ Π_A est un polynôme unitaire.
- ◊ Π_A est un polynôme annulateur de A .
- ◊ Si P est un polynôme annulateur de A , alors Π_A divise P .

- Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on désigne par $e_i = (x_1, \dots, x_n)$, avec $x_i = 1$ et $x_j = 0$, pour tout $j \neq i$.

Préliminaires

1. Montrer que $\ker A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. (a) Vérifier que $\ker 0_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
(b) On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.
Montrer que, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $e_i A {}^t e_j = a_{ij}$.
(c) En déduire que $\ker A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, si et seulement si $A = 0_n$.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(A^k) \subset \ker(A^{k+1})$.

Partie I- Polynômes en A

1. (a) Montrer que, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$.
(b) On note

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P &\longmapsto P(A)\end{aligned}$$

Montrer que Φ est linéaire.

2. (a) Montrer que, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, $(X^k Q)(A) = A^k Q(A)$.
(b) Montrer que, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.
(c) Déduire que, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $Q(A)$ commutent.
3. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P({}^t A) = {}^t P(A)$.

Partie II- Lemme de décomposition des noyaux

1. On se donne deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux.
 - (a) Montrer que $\ker Q(A) \subset \ker[(PQ)(A)]$ et que $\ker P(A) \subset \ker[(PQ)(A)]$.
 - (b) Montrer que $\ker P(A)$ et $\ker Q(A)$ sont en somme directe.
 - (c) Déduire que $\ker P(A) \oplus \ker Q(A) \subset \ker[(PQ)(A)]$.
 - (d) Etablir l'inclusion réciproque $\ker[(PQ)(A)] \subset \ker P(A) \oplus \ker Q(A)$.
2. Soient $r \geq 2$, et $P_1, \dots, P_r$ des polynômes deux-à-deux premiers entre eux. Montrer que par récurrence que

$$\ker \left(\prod_{k=1}^r P_k(A) \right) = \bigoplus_{k=1}^r \ker(P_k(A)).$$

3. Soient $r \geq 2$, et $P_1, \dots, P_r$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux-à-deux premiers entre eux.

Montrer que le polynôme $\prod_{k=1}^r P_k$ est un polynôme annulateur de A , si et seulement si

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{k=1}^r \ker(P_k(A)).$$

Partie III- Matrices Normales

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **normale** si ${}^tAA = A{}^tA$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice normale.

1. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que V est nul si, et seulement si, ${}^tVV = 0$.

2. (a) Montrer que $\ker({}^tAA) = \ker A$.
(b) En déduire que $\ker A = \ker({}^tA)$.
(c) Montrer que $\ker A = \ker A^2$.
(d) Montrer par récurrence que, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\ker A = \ker A^m$.
3. (a) Montrer que, pour tout réel λ , $(A - \lambda I_n)$ est une matrice normale.
(b) En déduire que, pour tout réel λ , et tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\ker(A - \lambda I_n) = \ker[(A - \lambda I_n)^m].$$

4. On suppose que Π_A est **scindé** sur $\mathbb{R}$.

On écrit $\Pi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ où les réels λ_i sont distincts et les entiers $m_i \in \mathbb{N}^*$.

On se propose de montrer que toutes les racines de Π_A sont simples.

- (a) Montrer que

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^r \ker[(A - \lambda_i I_n)^{m_i}].$$

- (b) Déduire que

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(A - \lambda_i I_n).$$

- (c) Montrer que le polynôme $\prod_{j=1}^r (X - \lambda_j)$ est un polynôme annulateur de A .

- (d) Conclure que $\Pi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$.

5. (a) Montrer que Π_A et Π'_A sont deux polynômes premiers entre eux.

- (b) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $F = \frac{\Pi'_A}{\Pi_A}$.