

Examen d'Algèbre - Semestre N°2
Section : M.P.1

Durée : 2 Heures

Date : 15 Mai 2025

problème I (10 points)

 $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}^*$.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

(a) Montrer que l'application

$$f_A : M_{n,1}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX$$

est linéaire.

(b) Donner la matrice de f_A relativement à la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.On note $\ker(A) = \ker(f_A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_n\}$ où $0_n = 0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}$.(c) Montrer que A est inversible si et seulement si $\ker(A) = \{0_n\}$.

Dans toute la suite on prend $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on note $P_A(x) = \det(A - xI_3)$.

2. (a) Vérifier que $P_A(x) = -(x-1)(x-2)^2$.(b) Dédurre que $A - I_3$ et $A - 2I_3$ ne sont pas inversibles, et que A est inversible.3. (a) Trouver $E_1 = \ker(A - I_3)$ et $E_2 = \ker(A - 2I_3)$ et donner leurs dimensions.(b) Montrer que $E_2 \subset F_2 = \ker((A - 2I_3)^2)$.(c) Trouver $w \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $(A - 2I_3)^2 w = 0_n$ et $v = (A - 2I_3)w \neq 0_n$.(d) Justifier que $\langle v \rangle$ est une base de E_2 et que $\langle w, v \rangle$ est une base de F_2 .(e) Montrer que $E_1 \cap F_2 = \{0_n\}$.(f) Dédurre que $E_1 \oplus F_2 = M_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. (a) Soit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, et que $E_1 = \text{vect}(u_1)$, $E_2 = \text{vect}(u_2)$ et $F_2 = \text{vect}(u_2, u_3)$.

(b) Sans calculer le produit, montrer que $(A - I_3)(A - 2I_3)^2 = (0)$, (0) désigne la matrice nulle.

(c) Exprimer A^{-1} en fonction de I_3 , A et A^2

(d) Trouver la matrice A' de l'application f_A dans la base B'

Problème II (10 points)

E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .
 $\mathcal{L}(E)$ désigne l'espace des endomorphismes de E et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ celui des formes linéaires sur E .
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi_i : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k &\longmapsto \varphi_i(x) = \alpha_i \end{aligned}$$

Partie I

1. Rappeler la dimension de E^* .
2. Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, calculer $\varphi_i(e_j)$.
3. Montrer que $\mathcal{B}_E^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* .
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
 - (a) Montrer que pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi \circ f \in E^*$.
 - (b) Dédire que l'application ${}^t f : \varphi \mapsto {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$ est un endomorphisme de E^* .

Partie II

On considère l'application

$$\begin{aligned} T : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E^*) \\ f &\longmapsto T(f) = {}^t f \end{aligned}$$

1. Montrer que T est linéaire.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ non nulle, et soit $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0_E$.
 - (a) Justifier qu'il existe un hyperplan H tel que $H \oplus \text{vect}(f(u)) = E$
 - (b) Dédire qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi \circ f \neq 0_{E^*}$.
 - (c) Montrer alors que T est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E^*)$.
3. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que ${}^t(f \circ g) = {}^t g \circ {}^t f$.

Partie III

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ relativement à la base $\mathcal{B}_E$, et soit $B = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice de ${}^t f$ relativement à la base $\mathcal{B}_E^*$.

1. Montrer que pour tout $\varphi \in E^*$,

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) \varphi_i.$$

2.
 - (a) Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, rappeler $f(e_j)$ en fonction des coefficients de A .
 - (b) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, donner l'expression de ${}^t f(\varphi_i)$ en fonction des coefficients de B .
 - (c) Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, en calculant de deux manières ${}^t f(\varphi_i)(e_j)$, déduire que $b_{j,i} = a_{i,j}$.
 - (d) Exprimer B en fonction de A .
 - (e) Sans calculs, déduire que pour toutes matrices $M, N \in M_n(\mathbb{K})$, ${}^t(MN) = {}^t N {}^t M$.