

Devoir de contrôle n°2

ANALYSE - MP 1

Date : 25/02/2025

Durée : 1h30mn

Nombre de pages : 2

*N.B. Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.*EXERCICE (8pts)On considère la fonction f définie par $f(x) = x(\operatorname{Arctg}(x))^2$.

1. (a) Donner le développement limité de f à l'ordre 5 au voisinage de 0.
 (b) Discuter suivant le paramètre réel λ , la position, au voisinage de 0, de la courbe $\mathcal{C}$ de f par rapport à la courbe Γ d'équation : $y = (1 - \lambda)x^3 + \lambda x^5$.
2. (a) Vérifier que : $\forall x > 0, \operatorname{Arctg}(x) + \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
 (b) Etudier la branche infinie de $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ (on déterminera l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$ (si elle existe) et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$).
3. On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{x^2 + 1}{2} (\operatorname{Arctg}(x))^2 - x \operatorname{Arctg}(x) + \ln(\sqrt{1 + x^2})$$

- (a) Montrer que F est convexe sur $\mathbb{R}$.
- (b) Montrer que F n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

PROBLÈME (12pts)

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Partie I

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme T_n de degré n , à coefficients réels tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} [e^x T_n(x) - 1].$$

On précisera une relation de récurrence entre T_{n+1} , T_n et T'_n .

3. (a) Déterminer la dérivée n -ième de l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Utiliser la formule de Leibniz pour expliciter $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$.
 (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

4. Pour x fixé, en utilisant le théorème de Taylor-Lagrange, déterminer la limite de la suite $(T_n(x))$.

Partie II

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
 2. On admet dans la suite que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et on désigne par $a_n = f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 que l'on précisera.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n+1}$.

3. On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe $(n+1)$ réels $b_0, b_1, \dots, b_n$ tels que, au voisinage de 0,

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} x^k + o(x^n).$$

- (b) Montrer que le développement limité à l'ordre 2 de g au voisinage de 0 s'écrit

$$g(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2).$$

En déduire les valeurs de b_0, b_1 et b_2 .

- (c) En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = g(x)(e^x - 1)$, montrer que

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=1}^n C_n^k b_{n-k} = 0.$$

Bon travail.