

Devoir de synthèse d'Analyse n°2

Nbre de pages : 3

Durée : 2h

Problème 1 : (10 points)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$

Partie A : Généralités

1. Justifier rigoureusement que la fonction f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Préciser le signe de la fonction f .
3. À l'aide d'un changement de variables, montrer que : $f(x) = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du$
4. On pose $g(x) = e^x f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du$.
 - (a) Justifier que g est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
 - (b) Déterminer l'expression de $g'(x)$
5. En déduire que f est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$y' + y = \alpha(x)$$

où α est une fraction rationnelle à expliciter.

6. Montrer que :

$$f'(x) = - \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2} dt$$

7. La fonction f admet-elle des limites (finies ou infinies) en 0^+ et $+\infty$?
(on ne demande pas de calculer ces limites éventuelles)

Partie B : Etude asymptotique

1. Montrer l'encadrement suivant valable sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}$$

2. En déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$
3. Justifier l'existence d'un réel $M \geq 0$ tel que :

$$\forall t \in [0, 1], |e^t - 1| \leq Mt$$

4. Montrer que la fonction h définie par :

$$h(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x + t} dt$$

est bornée sur $]0, +\infty[$

5. En déduire que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x$$

Problème 2 : (10 points)

On considère les suites $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = H_n - \ln n$$

Partie 1 : Constante d'Euler

1. Établir pour tout entier naturel k non nul l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

2. (a) Quelle est la limite de la suite (H_n) ?
- (b) En utilisant le résultat de la question 1, montrer pour tout entier naturel non nul n l'encadrement suivant :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

- (c) En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.
3. (a) En utilisant à nouveau l'encadrement obtenu à la question 1, montrer que la suite (u_n) est décroissante.

- (b) En déduire que cette suite est convergente ; on note γ sa limite.
Montrer que γ appartient à $[0, 1]$.

Partie 2 : Développement asymptotique de H_n

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout entier naturel non nul k :

$$J_k = \frac{1}{2} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2} \right)^2 f''(t) dt$$

1. (a) Établir pour tout entier naturel non nul k l'égalité suivante :

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t) dt$$

- (b) En déduire pour tout entier naturel non nul n la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

2. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- (a) Établir pour tout entier naturel non nul k la double inégalité suivante :

$$0 \leq J_k \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}$$

- (b) En déduire que la série de terme général J_k est convergente.
(c) En déduire également, pour tout entier naturel non nul n l'encadrement suivant :

$$0 \leq \sum_{k=n}^{\infty} J_k \leq \frac{1}{8n^2}$$

3. Trouver le développement asymptotique suivant :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Fin de l'énoncé