

Devoir de contrôle d'Algèbre - Semestre N°1 Section : M.P.1
--

Durée : 1h 30 min

Date : 01-11-2025

Exercice

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1. Soient $z \in \mathbb{C}$. Si $|z| > 1$, alors $|e^z| > 1$.
2. $\{(2k + \frac{1}{2})i\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation $e^z = -i$.
3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Alors $\sum_{0 \leq p, q \leq n-1} e^{\frac{i\pi(p+q)}{n}} = 2 \sum_{0 \leq p \leq q \leq n-1} e^{\frac{i\pi(p+q)}{n}}$.
4. Soit $(z_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Alors $\sum_{1 \leq i < j < n} z_{i,j} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} z_{i,j} \right)$.
5. Soit f une application de E vers F et soit A une partie de E . Si $f(x) \in f(A)$, alors $x \in A$.

Problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Partie 1 : Matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On définit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \mathcal{R} B \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } B = P^{-1}AP$$

1. (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 (b) Les deux matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont elles en relation par $\mathcal{R}$?
 (c) Déterminer $cl_{\mathcal{R}}(I_n)$: la classe de I_n modulo $\mathcal{R}$.
2. (a) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A \mathcal{R} B$, alors A et B ont même trace.
 (b) La réciproque est-elle vraie?
3. Pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on considère l'application

$$f_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$A \longmapsto P^{-1}AP$$

- (a) Montrer que, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f_P(AB) = f_P(A) \cdot f_P(B)$.
- (b) Montrer que l'application f_P est bijective.

4. On pose $H = \{f_P; P \in GL_n(\mathbb{R})\}$. On définit l'application

$$\begin{aligned}\psi : GL_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow H \\ P &\longmapsto f_P\end{aligned}$$

- (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Déterminer l'application $\psi(\lambda I_n)$.
- (b) En déduire que l'application ψ n'est pas injective.
- (c) L'application ψ est-elle surjective ?

Partie 2 : Exemples de racines carrées des matrices

Définition : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice B est une racine carrée de la matrice A , si $B^2 = A$.

1. (a) **Exemple 1 :** Cas où $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda \\ \vdots & & \dots & 0 \\ & \dots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Calculer B^2 et déduire que la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, 0_n , admet une infinité de racines carrées.

- (b) **Exemple 2 :** Cas où $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer $(A_\theta)^2$ et déduire que la matrice unité $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. **Exemple 3 :** Cas où $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$: matrice diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$.

(a) Soit B une racine carrée de A .

(i) Montrer que $AB = BA$.

(ii) En déduire que la matrice B est diagonale.

(iii) On note alors $B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Que vaut b_i^2 lorsque $i \in \{1, \dots, n\}$?

(b) Déduire que s'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_i < 0$, alors A n'admet pas une racine carrée.

(c) On suppose que $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

Déterminer les racines carrées de la matrice A .

3. L'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto M^2\end{aligned}$$

est-elle injective ? surjective ?