



Examen d'Algèbre - Semestre N°1
Section : M.P.1

Durée : 2 Heures**Date : 13 Décembre 2025****Problème 1**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $T_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures de taille n et à coefficients réels.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in T_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Que vaut $a_{i,j}$ si $i > j$.
- (b) Montrer que $A + \alpha B \in T_n(\mathbb{R})$.
- (c) Montrer que $AB \in T_n(\mathbb{R})$.
- (d) Dédire que $(T_n(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in T_n(\mathbb{R})$, telle que $({}^t A)A = A({}^t A)$

- (a) Montrer que pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on a :
$$\sum_{k=1}^{\min(i,j)} a_{k,i} a_{k,j} = \sum_{k=\max(i,j)}^n a_{i,k} a_{j,k}.$$
- (b) Dédire que A est une matrice diagonale.
- (c) Montrer la réciproque, c'est à dire : si A est diagonale, on a : $({}^t A)A = A({}^t A)$.

3. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in T_n(\mathbb{R})$.

- (a) Déterminer J^2, J^3, J^k, J^{n-1} et J^n ($2 \leq k \leq n$).
- (b) Exprimer K en fonction de $I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1}$.
- (c) Dédire que K est inversible et donner son inverse.
4. (a) Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, exprimer KJ^k en fonction des puissances de la matrice J .
- (b) Pour $j \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$\sum_{k=0}^j C_{p+k-1}^k = C_{p+j}^j.$$
- (c) Dédire que pour tout $p > 0$, $K^p = \sum_{k=0}^{n-1} C_{p+k-1}^k J^k$.
- (d) Ecrire la matrice K^4 pour $n = 3$.

Problème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note par $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ l'ensemble des racines n -ième de 1. On rappelle que :

$$U_n = \left\{ \omega_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}} \mid k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}.$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ on note :

$$H_k = \{(\omega_k)^m \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Partie I

1. (a) Montrer que $(U_n, \times)$ est un groupe, et déterminer son cardinal.
(b) Justifier que pour tout $z \in U_n$, $\bar{z} \in U_n$.
(c) Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, trouver $k' \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que $\omega_{k'} = \overline{\omega_k}$.
(d) Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, $U_n = U_m$ si et seulement si, $n = m$.
2. (a) Soit $d, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $U_d \subset U_n$ si et seulement si d divise n .
(b) Soit $p \in \{1, \dots, n-1\}$.
 - i. Pour tout $s \in \mathbb{Z}$, montrer que $\omega_p^s \in H_p$.
 - ii. Montrer que H_p est un sous groupe de U_n .
3. Soit U un sous groupe de U_n et $U \neq \{1\}$. Soit $r = \min \{k \in \{1, \dots, n-1\} \mid \omega_k \in U\}$.
 - (a) Soit $\omega_k \in U$. Montrer que $\omega_k \in H_r$, puis déduire que $U = H_r$.
(indication : Faites une division euclidienne de k par r)
 - (b) En s'inspirant de la question précédente, montrer que r divise n .
 - (c) Déduire que $H_r = U_d$ où $d = \frac{n}{r}$.

Partie II

Soit $\omega_k \in U_n$. On dit que ω_k est une racine n -ième primitive de 1 si $H_k = U_n$. On note Ω_n l'ensemble des racines n -ième primitives de 1.

1. En écrivant U_1, U_2, U_3 et U_4 , donner $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ et Ω_4 .
2. Soit $\omega_r \in \Omega_n$.
 - (a) Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Montrer qu'il existe $u_k \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_r^{u_k} = \omega_k$.
 - (b) Déduire que n divise $ru_k - k$.
 - (c) En prenant $k = 1$, déduire que $\Omega_n = \{\omega_r \mid r \wedge n = 1\}$.
3. On suppose que n est premier.
 - (a) Donner Ω_n , en déduire que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $H_k = U_n$.
 - (b) Donner tous les sous groupes de U_n .