

Devoir surveillé d'Analyse N°1
MP 1

Date : 28/10/2025

Durée : 1h30mn

Nombre de pages : 2

N.B. *Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.*EXERCICE 1 (11 pts)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ et $h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \text{Arcsin}(g(x)) + \text{Arccos}(h(x))$.

1. Etudier les variations des fonctions g et h (dresser leurs tableaux de variation).
2. Déterminer le domaine de définition de f .
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et calculer $f'(x)$ dans chacun des intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 0[$, $] 0, 1[$ et $] 1, +\infty[$.
5. En déduire une expression simple de $f(x)$.
6. Tracer la courbe représentative C_f de f .
7. En utilisant le changement de variable $\theta = \text{Arctan}(x)$, $x \in [0, +\infty[$, retrouver $f(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$.

EXERCICE 2 (7 pts)

1. On pose $I =] -\infty, 1[$ et on considère sur I l'équation différentielle suivante :

$$(E_1) : \quad xy'(x) + y(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

- (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) sur chacun des deux intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, 1[$.

- (b) Y a-t-il une solution de l'équation (E_1) définie sur I ?

2. On pose $J =] 0, 1[$ et on considère sur J l'équation différentielle suivante :

$$(E_2) : \quad x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

d'inconnu $y : J \rightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable.

A toute application $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, on associe l'application $\mathcal{L}(f) : J \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in J, \quad (\mathcal{L}(f))(x) = xf'(x) + f(x).$$

- (a) Soit une application $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable. Déterminer, pour tout $x \in J$, l'expression de $(\mathcal{L}(\mathcal{L}(f)))(x)$ en fonction de x , $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
- (b) En déduire que :
 f est solution de (E_2) sur J si, et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in J$,
 $(\mathcal{L}(f))(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x(x-1)}$.
(Ind. utiliser la question 1.).
- (c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E_2) sur J .
(On pourra remarquer que $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$).

EXERCICE 3 (2 pts)

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et telle que :

$$(*) \quad \forall x, t \in \mathbb{R}, f(x+t) = f(x)f(t).$$

1. Donner un exemple de fonction dérivable, non nulle, vérifiant $(*)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $(*)$. On note $\lambda = f'(0)$.
 Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, on considère la fonction g telle que $g(x) = f(x+t)$. En dérivant g , prouver que f est solution de l'équation différentielle : $(E) \ y'(t) - \lambda y(t) = 0$.
3. Conclure.

Bon travail.