

Devoir de synthèse N°1: Analyse

Durée: 2h

Date: 15-12-2025

Nbre de pages: 2



N. B. Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Problème 1 :(10 points)

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x) = x - E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x . Soit $a \in \mathbb{R}$ et on pose $A = \{f(na) ; n \in \mathbb{N}^*\}$.

Partie I

- (a) Vérifier que $A \subseteq [0, 1[$.
(b) En déduire que A admet une borne inférieure et une borne supérieure. On note $\alpha = \inf(A)$ et $\beta = \sup(A)$.
- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
(a) Vérifier que $f(x + k) = f(x)$.
(b) Montrer que $f(kf(x)) = f(kx)$.
- Montrer que $x \in \mathbb{R}$ est rationnel si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $f(kx) = 0$.

Partie II

On suppose ici que $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note r le reste de la division euclidienne de n par q . Montrer que $f(na) = f(ra)$.
(b) Vérifier que $f(qa) = 0$.
(c) En déduire que $A = \{f(ka) ; k \in \mathbb{N} \cap [0, q - 1]\}$.
- Déduire que $\beta = \max(A)$ et $\alpha = \min(A) = 0$.

Partie III

On suppose ici que $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- On suppose $\alpha > 0$.
(a) Justifier que l'ensemble $B = \{k \in \mathbb{N}^* ; k\alpha \geq 1\}$ admet un plus petit élément. On note $p = \min(B)$.
(b) Vérifier que $\alpha < \frac{\alpha + 1}{p}$.
(c) Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha \leq f(k_0 a) < \frac{\alpha + 1}{p}$.
(d) Vérifier que $E(pf(k_0 a)) \geq 1$ et $f(pf(k_0 a)) < \alpha$.
- En déduire alors que $\alpha = 0$.

Problème 2 (10 points)

Soient deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers la même limite L .

On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge plus vite que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \implies |x_n - L| \leq \varepsilon |y_n - L|.$$

Partie A :

- I- Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ converge plus vite que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$, alors $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge plus vite que $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$.
- II- Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers une limite réelle ℓ .
Pour $0 < \alpha < 1$, on définit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$V_n = \frac{U_{n+1} - \alpha U_n}{1 - \alpha}.$$

On suppose qu'il existe des réels a, b, α, β tels que :

$$0 < \beta < \alpha < 1, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad \text{et} \quad U_n = \ell + a\alpha^n + b\beta^n + o(\beta^n).$$

1. Vérifier que $U_n - \ell \sim a\alpha^n$.
2. Montrer que $V_n = \ell + \frac{b(\beta - \alpha)}{1 - \alpha} \beta^n + o(\beta^n)$.
3. En déduire que $V_n - \ell \sim \frac{b(\beta - \alpha)}{1 - \alpha} \beta^n$ et donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.
4. Comparer les vitesses de convergence de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en utilisant la définition.
5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n - \ell}{V_n - V_{n-1}}$.
6. Pour $\varepsilon > 0$, trouver une condition suffisante sur V_n et V_{n-1} pour avoir $|V_n - \ell| \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang.

Partie B :

Soit maintenant $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite qui converge vers ℓ . On considère les deux suites

$$R_n := \frac{W_{n+1} - W_n}{W_n - W_{n-1}} \quad \text{et} \quad T_n := \frac{W_{n+1} - \ell}{W_n - \ell}.$$

1. Montrer que si la suite $(|R_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge alors sa limite est nécessairement dans $[0, 1]$.
2. Supposons maintenant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lambda \in]0, 1[$, et qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $W_n \neq W_{n-1}$.
Montrer alors la suite $(R_n)_{n \geq n_0}$ converge vers λ .
3. Considérons la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = (-1)^n \lambda^{2n} \text{ et } W_{2n+1} = (-1)^n \lambda^{2n+1}.$$

- (a) Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite ℓ .
- (b) Vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{W_{n+1} - \ell}{W_n - \ell} \right| = \lambda$, et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_n \neq W_{n-1}$.
- (c) Montrer que la suite $\left(\frac{W_{n+1} - W_n}{W_n - W_{n-1}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.
- (d) Conclure.