

- Les résultats littéraux devront être encadrés.
- Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.
- Les calculatrices sont autorisées.

**QCM :**

QCM 1 —La force centrifuge dans un référentiel en rotation uniforme : A. Est conservative B. Son travail sur une trajectoire fermée est nul C. Elle dérive d'un potentiel scalaire D. Elle dépend de la vitesse du point matériel	QCM 2 — La force de Coriolis : A. Est nulle si le mobile évolue rectilignement B. Ne travaille jamais C. Est proportionnelle à la vitesse relative du point D. Peut-être dérivée d'un potentiel
QCM 3 —Dans un référentiel non galiléen : A. Le théorème de l'énergie cinétique reste valable B. La force de Coriolis ne modifie pas l'énergie cinétique C. Les forces d'inertie peuvent fournir du travail D. L'énergie mécanique est toujours conservée	QCM 4 —Dans un référentiel non galiléen, la réaction d'une liaison parfaite : A. Compense une partie des forces d'inertie B. Est indépendante des forces d'inertie C. Peut être modifiée par la force de Coriolis D. Est toujours identique à celle obtenue en référentiel galiléen

Exercice 1 : (Bille évoluant dans un cône)

Une bille, assimilée à point matériel M de masse m , est placée dans un cône vertical, dont l'axe est (Oz) , et le demi-angle au sommet est α , voir figure 1. Le cône est parfaitement lisse, de sorte que la bille M peut glisser sans frottement tout en conservant un contact permanent avec la surface intérieure du cône. Les conditions initiales du mouvement sont:

- À l'instant initial $t=0$, la bille est située à une altitude z_0 le long de l'axe vertical Oz .
- Sa vitesse initiale est horizontale et purement azimutale: $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_\theta$

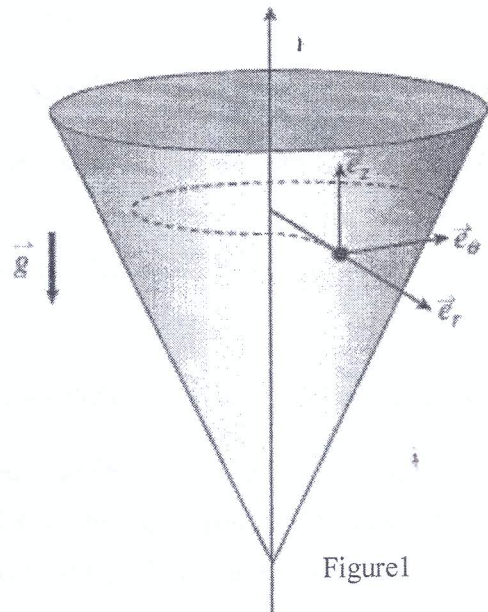


Figure1

On repère la position de la bille M, dans le plan de son mouvement, par ses coordonnées polaires r et $\theta = (Ox, \vec{e}_r)$. On utilisera la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associée à ces coordonnées polaires, voir figure 1.

- 1) Montrer que la composante L_z (suivant $\vec{e}_z$) du moment cinétique $\vec{L}$ par rapport à O de la bille M, reste constante au cours du mouvement. Donner l'expression de L_z ainsi que sa valeur en fonction des conditions initiales.
- 2) Pour quelle raison la bille M décrit-elle une trajectoire autour de l'axe (Oz) en conservant un sens de rotation constant, sans jamais rejoindre le fond du cône ?
- 3) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $E_p(z)$, on donne $E_p(z=0) = 0$.
- 4) Exprimer l'énergie mécanique totale de M sous la forme : $E_m = f(\dot{z}) + E_{p,eff}(z)$. Où l'énergie potentielle effective $E_{p,eff}(z)$ s'écrit : $E_{p,eff}(z) = \frac{L_z^2}{2m \tan^2(\alpha) z^2} + mgz$
- 5) Tracer la courbe $E_{p,eff}(z)$ justifier l'évolution de la bille entre deux altitudes extrêmes et discuter l'état du mouvement au cours de cette évolution.

Exercice 2 : (Équilibre en référentiel tournant)

Le système étudié est constitué d'une glissière T, solidaire d'un bâti pouvant pivoter autour d'un axe vertical (OZ). Sur cette glissière, inclinée d'un angle fixe θ par rapport à la verticale, repose un mobile S, assimilé à un point matériel de masse m , pouvant se déplacer sans frottement le long de T. Par ailleurs, ce mobile est relié à un ressort à spires non jointives, de raideur k et de longueur à vide l_0 , dont l'autre extrémité est fixée au bâti, comme illustré sur la figure 2.

Système immobile

- 1) Déterminer la condition d'équilibre du mobile.
- 2) Calculer la longueur du ressort l_e à l'équilibre.

Système en rotation uniforme autour de (OZ) ($\omega \neq 0$)

- 3) Identifier toutes les forces qui agissent sur S dans le référentiel $\mathcal{R}$ ($O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) lié à la glissière.
- 4) Établir l'équation différentielle du mouvement relatif de S dans ce référentiel

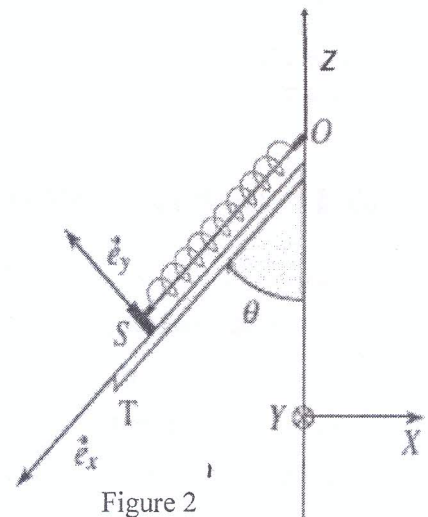


Figure 2

On cherche à établir l'équation différentielle du mouvement du mobile S à travers une étude énergétique.

- 5) Déterminer les énergies cinétique et potentielle de S dans le référentiel lié à la glissière.
- 6) En déduire l'équation différentielle à l'aide du théorème de l'énergie mécanique.
- 7) Déterminer la nouvelle longueur d'équilibre l_{e1} du ressort lorsque le système est en rotation à une vitesse angulaire ω suffisamment faible pour que S reste en contact avec la glissière.
- 8) Étudier la stabilité de cet équilibre.
- 9) Exprimer le vecteur réaction $\vec{R}$ de la glissière sur SSS dans cette configuration.

Problème : (Sphère de Hill de Jupiter)

On considère une sonde du programme spatial *Voyager*, assimilée à un point matériel P de masse m . La sonde est en mouvement dans un champ gravitationnel qu'on supposera uniquement dû ici à Jupiter, relativement au référentiel d'étude "jupiterocentrique" R_j considéré galiléen, voir figure 3. La planète est assimilée à une boule à répartition sphérique de masse, de sorte qu'elle se comporte d'un point de vue gravitationnel comme un point matériel fictif de même masse M_j que cette dernière et situé en son centre J .

- 1) On repère la sonde par ses coordonnées cylindriques $(r, \theta, z=0)$ de centre J . On choisit l'axe $(J, \vec{u}_z)$ de sorte que $\vec{L}_j = L_j \vec{u}_z$. Justifier à l'aide du théorème du moment cinétique que le moment cinétique $\vec{L}_j$ par rapport au point J de la sonde se conserve. En déduire que le mouvement de la sonde est plan. Montrer que la quantité $C = r^2 \dot{\theta}$ est constante.
- 2) Établir l'expression de l'énergie potentielle $E_p(r)$ dont dérive la force gravitationnelle subie par la sonde. On prendra $E_p(+\infty) = 0$.
- 3) Justifier que l'énergie mécanique E_m de la sonde se conserve. Établir son équation radiale sous la forme : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}$ où, $E_{p,eff}$ désigne une énergie potentielle effective dont on donnera l'expression en fonction de m , C , r et de $E_p(r)$.

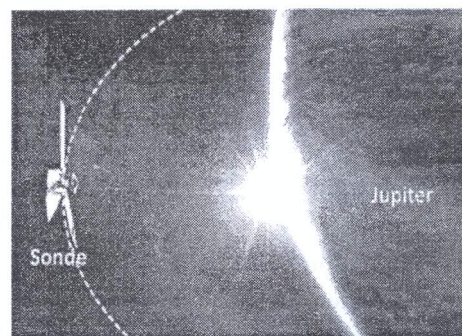


Figure 3

- 4) Représenter qualitativement $E_{p,eff}$. Expliciter les différents états possibles de la sonde en précisant la forme de sa trajectoire selon la valeur de son énergie mécanique E_m .
- 5) Donner l'expression de la vitesse minimale V_l qu'il faudrait communiquer à la sonde à la distance r du centre J de Jupiter pour qu'elle se libère de l'attraction gravitationnelle de Jupiter. Cette vitesse est appelée vitesse de libération de la sonde.

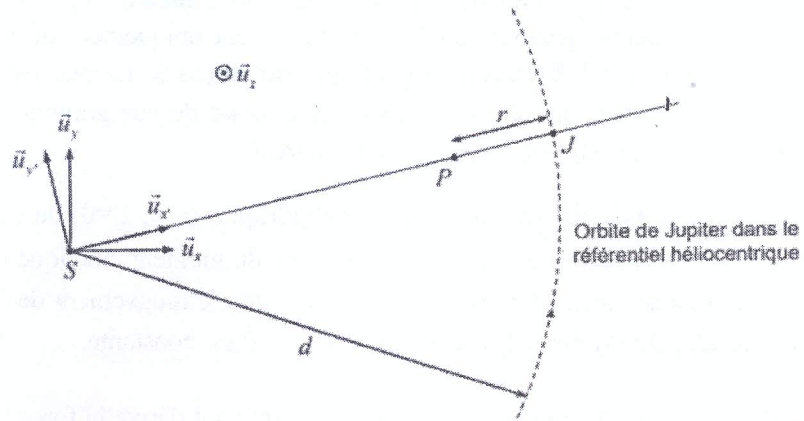
Dans ce qui a précédé, seule l'influence de l'attraction gravitationnelle de Jupiter sur le mouvement de la sonde a été considérée. On se propose maintenant d'établir une condition quantitative pour négliger l'influence de l'attraction gravitationnelle du Soleil sur la sonde P devant celle de Jupiter.

On considère pour cela que le centre J de Jupiter décrit une **trajectoire circulaire** de rayon d autour du centre S du Soleil dans le plan orbital $(S, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, relativement au référentiel héliocentrique R_h considéré galiléen. On note Ω la vitesse angulaire à laquelle tourne le point J dans le sens direct de l'axe $(S, \vec{u}_z)$ dans ce référentiel, voir figure 4.

- 6) Donner l'expression de la force de gravitation Jupiter-Sonde en fonction de G , M_j , m et r , puis celle de gravitation Soleil-sonde en fonction de G , M_s , m , r et d . Prouver que ces deux efforts ont des sens opposés.
- 7) Établir, à partir du principe fondamental de la dynamique, les expressions de Ω et de la vitesse $V_{J,h}$ de Jupiter dans le référentiel lié au soleil R_h .
- 8) On raisonne dans la suite que le référentiel R' auquel est lié un repère de centre S , les axes $(S, \vec{u}_{x'})$ et $(S, \vec{u}_{y'})$ tournent autour de l'axe $(S, \vec{u}_z)$, dans le sens direct et à la vitesse angulaire Ω dans le référentiel R_h , avec $\vec{u}_{x'} = \frac{\vec{S}J}{d}$, voir figure 4. Le référentiel R' est-il galiléen ? Justifier.

On considère maintenant la configuration où la sonde P est située dans le plan orbital $(S, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ de Jupiter et telle que S , P et J soient alignés dans cet ordre, voir figure 4. On cherche la distance r de la sonde au centre J de Jupiter à laquelle elle est en équilibre dans le référentiel R' .

Figure 4



- 9) Donner les expressions des forces s'exerçant sur la sonde P en fonction de m , M_J , M_S , Ω , G , d et de r . On se limitera aux forces d'origine gravitationnelle à celles dues au Soleil et à Jupiter et la force d'inertie d'entraînement de R' par rapport à R .
- 10) Ecrire la condition d'équilibre de la sonde P dans le référentiel R' .
- 11) Montrer que cette condition conduit à :

$$M_J d^3 (d - r)^2 = -M_S r^2 ((d - r)^3 - d^3)$$

On suppose que $r \ll d$. Sachant que les développements limités $(d - r)^2$ et $(d - r)^3$ s'écrivent comme suit:

$$(d - r)^2 \approx d^2 \text{ à l'ordre 0}$$

$$(d - r)^3 \approx d^3 - 3d^2 r \text{ à l'ordre 1}$$

- 12) Etablir l'expression de la distance $r = r_H$ en fonction de M_J , M_S et de d . L'ensemble des points de l'espace tels que la sonde P soit en équilibre dans le référentiel R' est donc approximativement une sphère centrée en J, de rayon r_H , appelée sphère de Hill. Calculer r_H .

On donne $M_S = 1,989 \times 10^{30}$ kg ; $M_J = 1,898 \times 10^{27}$ kg ; $G = 6,67430 \times 10^{-11}$ (SI) ; $d = 7,8 \cdot 10^8$ km

