

Devoir de contrôle d'Algèbre-Semestre N°2 Sections : P.C.1 et P.T.1
--

Durée : 1h30

Date : 23 Février 2016

Nb de pages : 2

N.B : L'utilisation des calculatrices est interdite.

Exercice 1On considère le polynôme : $P(X) = X^5 + 2X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 2X + 1$.

1. Vérifier que (-1) est une racine de P et donner son ordre de multiplicité.
2. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - a) Montrer que $j + j^2 = -1$ puis calculer j^3 .
 - b) En déduire que j est une racine simple de P .
3. Décomposer $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
4. Déduire la décomposition en produit de facteurs irréductibles de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X^2 + X + 1}{(X + 1)P(X)}.$$

Exercice 2On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les deux sous ensembles suivants :

$$F = \{f \in E; f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E; f(x) = ax, a \in \mathbb{R}\}.$$

(Indication : $f \in G \iff \exists a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$).

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E .
2. a) Soit $f \in E$. Montrer que la fonction h définie par :

$$h(x) = f(x) - f(1)x$$

est un élément de F .

- b) Montrer que : $E = F \oplus G$.

Exercice 3

Soit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x + y, x - y) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $\ker f$.
3. En déduire que f est injective.
4. Montrer que f est surjective puis déterminer $\operatorname{Im} f$.
5. Conclure que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} .

****Bonne chance****