

Devoir de synthèse d'Algèbre-Semestre N°2 Sections : P.C.1 et P.T.1
--

Durée : 2h

Date : 18 Mai 2016

Nbre de pages : 2

N.B : L'utilisation des calculatrices est interdite.

Exercice 1 : (10 pts)

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $B = (1, X, X^2)$ sa base canonique.

On note par id_E l'application identité de E et par I_3 la matrice unité d'ordre 3.

Soit φ l'application définie par :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = \frac{1}{8}(4X^2 - 1)P'' + XP'$$

- Montrer que φ est un endomorphisme de E .
 - Déterminer $A = \text{Mat}(\varphi, B)$, la matrice de φ dans la base B .
 - La matrice A est-elle inversible ? Justifiez votre réponse.
- Déterminer une base de $\ker(\varphi)$ et une base de $\text{Im}(\varphi)$.
 - Montrer que $E = \ker(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $F_\lambda = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; \varphi(P) = \lambda \cdot P\}$.

 - Montrer que $F_\lambda = \ker(\varphi - \lambda id_E)$.
 - Prouver que F_λ est un sous espace vectoriel de E .
 - Pour quelles valeurs de λ , la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible ?
- On pose $P_0 = 1, P_1 = X$ et $P_2 = 1 - 12X^2$.

 - Montrer que $B' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de E .
 - Vérifier que $P_0 \in F_0, P_1 \in F_1$ et $P_2 \in F_3$.
 - Déterminer $D = \text{Mat}(\varphi, B')$, la matrice de φ dans la base B' .
 - Déterminer $P = P_{B \rightarrow B'}$, la matrice de passage de B à B' ainsi que son inverse P^{-1} .
- Exprimer A en fonction de P et D , puis déduire la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : (10 pts)

On pose $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$: l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On désigne par : $B = (E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$, la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto \phi(A) = A - {}^t A \end{aligned}$$

où ${}^t A$ désigne la transposée de la matrice A .

1. a) Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Calculer $\phi(E_{11})$, $\phi(E_{12})$, $\phi(E_{21})$ et $\phi(E_{22})$.
2. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. a) Déterminer $\ker(\phi)$ et donner sa dimension.
b) Déterminer $\text{Im}(\phi)$ ainsi que sa dimension.
c) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(A) = \lambda \cdot J$.
4. a) L'application ϕ est-elle un projecteur ? Justifiez votre réponse.
b) En déduire que : $(\phi(M) - 2M) \in \ker(\phi), \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
c) Chercher α, β deux réels tel que $M = \alpha(\phi(M) - 2M) + \beta\phi(M)$.
d) Déduire que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker(\phi) \oplus \text{Im}(\phi)$.