

Université de Sfax
Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Matière : Analyse Niveau/Section : 1^{ère} année PC

A. U : 2015 – 2016

Examen du 2^{ème} Semestre Durée : 2 Heures

(Documents non autorisés)

Une grande importance sera accordée à la rédaction et à la clarté du raisonnement, il convient de noter avec précision les numéros des différentes questions

Exercice 1 :

Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite à valeurs strictement positives. Pour tout entier $n \geq 0$, on note

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

1. Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_k}{S_k}\right) = \frac{a_0}{S_n}.$$

2. (a) En calculant $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{a_k}{S_k}\right)$, justifier que les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} \ln \left(1 - \frac{a_n}{S_n}\right)$ sont de même nature.

(b) Montrer que les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{S_n}$ sont de même nature.

3. On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge. Soit α un réel.

(a) Pour $\alpha < 1$, vérifier que pour tout entier naturel non nul n

$$\frac{a_n}{S_n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n}{S_n^\alpha} \right)$$

(b) Pour $\alpha > 1$, montrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{a_n}{S_n^\alpha}.$$

(c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

4. Soit $\beta \in \mathbb{R}$, on considère la suite de terme général $a_n = \frac{1}{(n+1)^\beta}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^\beta}$.

(a) Déterminer, suivant les valeurs de β , la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^\beta}$.

(b) Discuter, suivant les valeurs de paramètre β , la nature des séries suivantes

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{S_n}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{S_n^2}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\sqrt{S_n}}.$$

Exercice 2 :

I. Questions de cours

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ fini et deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Définir les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(A|B)$ et $\mathbb{P}(B|A)$ en précisant leurs conditions d'existence.
2. Montrer que

$$[\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)] \Leftrightarrow [\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)].$$

3. Exprimer une condition nécessaire et suffisante sur les événements A et B pour que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

II. Une urne contient 6 jetons : deux jetons numérotés 0, trois jetons numérotés 1, un jeton numéroté 2. On tire successivement deux jetons sans remise. On note X la variable aléatoire égale à la valeur du premier jeton, et Y la variable aléatoire égale à la valeur du deuxième jeton.

1. Déterminer le cardinal de l'univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Déterminer le tableau de la loi conjointe du couple (X, Y) et les lois marginales de X et Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer l'espérance et la variance de X et Y .
5. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
6. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = 1\}$.
7. On considère la variable aléatoire $Z := X + Y$.
 - (a) Déterminer la loi de Z .
 - (b) Calculer l'espérance et la variance de Z .
8. Calculer

$$\mathbb{P}(\{Y = 0\}|\{X = 1\}) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{Z = 2\}|\{X = 1\}).$$

***** Bon Courage *****