

DEVOIR DE CONTRÔLE

Exercice I:

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

- a. On appelle projecteur de E tout endomorphisme p vérifiant $pop = p$.
- b. On appelle symétrie de E tout endomorphisme s vérifiant $sos = Id_E$.

I. Soit p un projecteur de E .

- (a) Montrer que $Id_E - p$ est un projecteur.
- (b) Montrer que $Im(p) = Ker(Id_E - p)$.
- (c) Montrer que $E = Ker(p) \oplus Im(p)$.

II. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z + y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z\right)$$

- (a) Vérifier que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Déterminer une base de $ker(f)$ et une base de $Im(f)$.
- (c) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$.

III. Soit

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (z, x + y - z, x)$$

1. (a) Vérifier que g est une symétrie et que $g = 2f - Id_{\mathbb{R}^3}$.
- (b) Déterminer $Ker(g - Id_{\mathbb{R}^3})$ et $Ker(g + Id_{\mathbb{R}^3})$.
- (c) En déduire $\mathbb{R}^3 = Ker(g - Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus Ker(g + Id_{\mathbb{R}^3})$.

Exercice II:

On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \mapsto (2x - y - z, -x + y, x - z, 0)$$

1. Énoncer le théorème du rang.
2. Montrer que f est linéaire.
3. Donner une base de $ker(f)$, en déduire $rg(f)$.
4. Donner une base de $Im(f)$.