

Examen d'Algèbre



- ☞ L'usage de calculatrices est interdit.
- ☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Notations

- ☞ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et à coefficients réels.
- ☞ I_n : la matrice identité d'ordre n .
- ☞ 0_n : la matrice nulle d'ordre n .
- ☞ $\mathbb{R}_2[X]$: l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré ≤ 2 .
- ☞ $id_{\mathbb{R}_2[X]}$: l'application identité de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ☞ Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On définit le polynôme de la matrice M par :

$$P(M) = aM^3 + bM^2 + cM + dI_3.$$

? Exercice

Soit $n \geq 2$. On définit l'application *trace* par :

$$\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \longmapsto \sum_{i=1}^n m_{ii}.$$

1. (a) Montrer que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 (b) Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
 (c) Existe-t-il un couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ vérifiant $AB - BA = I_n$?
2. On note $\mathcal{H} = \ker(\text{tr})$ et $\mathcal{D} = \text{vect}(I_n)$.
 (a) Montrer que l'application tr est surjective.
 (b) Quelle est alors la dimension de $\mathcal{H}$?
 (c) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}$.

? Problème

- (A) Soient $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et f l'application définie par :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], P \longmapsto (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer $A = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$.
3. Calculer le déterminant de A .
4. Dédire $\text{rg}(f)$.
5. L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$? Justifier la réponse.

- (B) Considérons le polynôme suivant

$$P(X) = \det(A - XI_3).$$

1. Montrer que $P(X) = (1 - X)(X + 1)(X - 3)$.
2. Retrouver le déterminant de A .
3. Calculer $P(A)$.
4. Dédire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.
5. Déterminer $f^{-1}(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

- (C) Considérons dans $\mathbb{R}_2[X]$, les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \ker(f - \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}), \quad G = \ker(f + \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}) \quad \text{et} \quad H = \ker(f - 3\text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}).$$

1. Montrer que F , G et H sont différents de $\{0\}$.
2. Montrer que les sommes $F + G$, $F + H$ et $G + H$ sont directes.
3. Sans déterminer des bases de F , G et H montrer que

$$\dim(F) = \dim(G) = \dim(H) = 1.$$

4. Trouver trois polynômes P_1 , P_2 et P_3 tels que :

(a) $F = \text{vect}(P_1)$.

(b) $G = \text{vect}(P_2)$.

(c) $H = \text{vect}(P_3)$.

5. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Déterminer $D = \text{Mat}(f, \mathcal{B}')$.
7. Déterminer P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis P^{-1} .
8. Montrer que $F \oplus G$ et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
9. Donner l'expression de la symétrie s par rapport à $F \oplus G$ parallèlement à H .

?

- Ⓓ Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par la donnée de leurs premiers termes

$$x_0 = 3, \quad y_0 = 0 \quad \text{et} \quad z_0 = 1$$

et par le système suivant :

$$(S') : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = y_n + z_n \end{cases}$$

Notons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Dédire que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer les expressions de x_n , y_n et z_n en fonction de n .