

Devoir de contrôle: Analyse

Durée 1h

Exercice 1
Soit $f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est de classe C^1 sur son domaine.
3. Calculer le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.
4. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 et déterminer sa position relative par rapport la courbe de f .

Exercice 2

I) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

1. En faisant le changement de variable convenable, déterminer

$$\int \frac{dt}{1+t^2x^2}$$

2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2x^2}$.

II) On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt & \text{si } x > 1 \\ F(1) = \ln 2 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[$ on a $\frac{x^2 - x}{\ln x^2} \leq F(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$.
(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

2. (a) Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[$ et $\forall t \in [x, x^2]$ on a:

$$\frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}.$$

- (b) En déduire que F est continue en 1.

3. (a) Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et donner l'expression de F' .

- (b) Soit $x > 1$. Montrer qu'il existe un réel $c \in]1, x[$ tel que:

$$F(x) - F(1) = (x - 1)F'(c).$$

- (c) En déduire que F est dérivable à droite en 1.
-