

Devoir de Synthèse N° 2 : **Analyse**
 Durée : 2H

Exercice :

Dans une population donnée, 15 % des individus ont une maladie M_a .

- Parmi les individus atteints par la maladie M_a , 20 % ont une maladie M_b .

- Parmi les individus non atteints par la maladie M_a , 4 % ont une maladie M_b .

On choisit un individu au hasard de la population et on considère les événements suivants :

A : "L'individu est atteint par la maladie M_a ".

B : "L'individu est atteint par la maladie M_b ".

1. Donner les valeurs de $p(A)$, $p(B|A)$ et $p(B|\bar{A})$.
2. Calculer $p(B)$ puis $p(A|B)$.

Problème :

Partie I

1. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle. On étudie la série $\sum (-1)^n U_n$.
 On note, pour $n \in \mathbb{N}$, S_n la somme partielle d'indice n de cette série.
 - (a) Démontrer que : les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
 - (b) En déduire que : la série $\sum (-1)^n U_n$ converge.
2. Justifier l'existence d'un réel S , tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = S$. On note : $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$.
3. On considère les suites $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$V_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}} \quad \text{et} \quad W_n = V_n - \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- (a) Montrer que : $\forall n \geq 2$, on a : $W_n = \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{p}} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \right) + \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$.
- (b) Montrer que : $\forall n \geq 2$, on a : $\int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{\sqrt{t}}$.
- (c) Dédurre que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers une limite l .

4. (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $V_n = W_n + 2\sqrt{n} - 2$.
 (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $R_{2n} = S - \sqrt{2}V_n + V_{2n}$.
 (c) Montrer que : $S = (\sqrt{2} - 1)(l - 2)$.
5. (a) Vérifier que $\forall n \geq 2$, on a : $W_{n+1} - W_n = -\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.
 (b) En déduire que : la série $\sum_{n \geq 2} (W_{n+1} - W_n)$ est convergente.
 (c) Retrouver alors que : la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie II

1. Montrer que : la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ est convergente et donner $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$.
2. Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = H_n - \ln(n)$ avec $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 (a) Montrer que : la série $\sum_{n \geq 1} (Z_{n+1} - Z_n)$ est convergente.
 (b) En déduire que : la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note : $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n$.
3. En exprimant $\sum_{n=1}^{+\infty} (Z_{n+1} - Z_n)$ en fonction de γ , montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \gamma.$$

4. Montrer que : $\forall n \geq 1$, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.
5. Vérifier que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$. En déduire l'expression suivante des sommes partielles

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt.$$

6. Montrer que : $\forall n \geq 1$, $\left| s_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{n+1}$.
7. En déduire que : la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.
8. Démontrer que : $s_{2n} = H_{2n} - H_n$. Retrouver alors la limite de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Bonne Chance