

Devoir de contrôle d'analyse n°2
Durée : 1H

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1

(Les questions 1 et 2 sont indépendantes)

1. Soit $f(x) = (x^2 + 1) \sin x$
 - (a) Calculer la dérivée de f .
 - (b) Montrer que l'équation $(1 + x^2) \cos x + 2x \sin x = 0$ admet au moins une solution sur $]0, \pi[$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telles que $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$.
 - (a) Montrer que $g(b) - g(a) \neq 0$.
 - (b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
[Indication : Appliquer le théorème de Rolle sur $[a, b]$ à la fonction h définie par $h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$].
 - (c) Dédire que : $\frac{\text{Arcos}(b) - \text{Arcos}(a)}{\text{Arcsin}(b) - \text{Arcsin}(a)} = -1, \forall a, b \in [-1, 1]$ avec $a \neq b$.

Exercice 2

On considère la fonction : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} + 2\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right), \forall x \in]-1, \pi[\setminus \{0\}$.

1. a) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f .
b) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement $\tilde{f}$ sur $] -1, \pi[$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - a) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction F_α définie par : $F_\alpha(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{(1+x^2)^\alpha}$.

- b) Montrer que F_α est dérivable en 0 et donner $F'_\alpha(0)$.
- c) Donner l'équation de la tangente T à la courbe de F_α au point $(0, F_\alpha(0))$.
- d) Discuter, suivant les valeurs de α , la position relative de la courbe de F_α et sa tangente T au voisinage du point $(0, F_\alpha(0))$.