

Devoir de synthèse N° 2 : **Analyse**

Durée : 2H

Aucun document n'est autorisé .

Exercice 1

Une urne U_1 contient 7 boules noires et 3 boules vertes.

Une urne U_2 contient 2 boules noires et 8 boules vertes.

On effectue une suite de tirage en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne selon la règle suivante:

Si au $(n - 1)$ -ième tirage, on a obtenu une boule noire alors le n -ième tirage s'effectue dans U_1 , sinon le n -ième tirage s'effectue dans U_2 .

Soit $n \geq 1$. On désigne par E_n l'événement : "obtenir une boule noire au n -ième tirage" et $p_n = \mathbb{P}(E_n)$: la probabilité d'obtenir une boule noire au n -ième tirage.

On choisit une urne au hasard et on effectue le premier tirage.

1. (a) Déterminer p_1 la probabilité d'obtenir une boule noire au premier tirage.
(b) Déduire p' la probabilité d'obtenir une boule verte au premier tirage.
2. (a) Calculer p_2 la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage.
(b) Montrer que $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{5}$; $\forall n \geq 2$.
3. (a) Montrer que la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ définit par $q_n = p_n - \frac{2}{5}$ est une suite géométrique qu'on déterminera la raison et le premier terme.
(b) Déterminer p_n en fonction de n et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\arctan t}{t} dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f' .
2. Vérifier que f est impaire.
3. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln 2(\arctan x) \leq f(x) \leq \ln 2(\arctan 2x)$.

(b) Déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(c) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 . On note aussi f son prolongement.

4. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(0)$.

5. Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$ puis tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

On considère la série $\sum_{n \geq 1} a_n v_n$ et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n v_k$. On suppose que:

i) $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite positive , décroissante et tend vers 0 .

ii) il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, on a $|S_n| \leq M$.

1. En écrivant $v_k = S_k - S_{k-1}, \forall k \geq 2$, montrer que $\sum_{k=1}^n a_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n$.

2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n S_n = 0$.

3. (a) Montrer que $\sum_{k=1}^n |(a_k - a_{k+1}) S_k| \leq a_1 M, \forall n \geq 2$.

(b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n+1}) S_n$ converge absolument .

4. Déduire que $\sum_{n \geq 1} a_n v_n$ est convergente .

Application:

Soit $0 < \alpha \leq 1$.

1. Vérifier que $\frac{\sin^2 n}{n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\cos(2n)}{2n^\alpha}$.

2. (a) Montrer que $\sum_{k=1}^n \cos(2k) = \cos(n+1) \frac{\sin(n)}{\sin(1)}$. (Indication: penser à calculer tout d'abord $\sum_{k=1}^n e^{2ik}$).

(b) En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que $|\sum_{k=1}^n \cos(2k)| \leq M, \forall n \geq 1$.

(c) Déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n)}{n^\alpha}$ est convergente puis la nature de la

série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n}{n^\alpha}$.

3. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^\alpha}$ n'est pas absolument convergente. (Indication: utiliser l'inégalité $|\sin n| \geq |\sin n|^2$).