

UNIVERSITÉ DE SFAX

★ ★ ★ ★ ★

INSTITUT PRÉPARATOIRE AUX ÉTUDES D'INGÉNIEURS DE SFAX

Section: P.C.1

A.U. 2020/2021

Devoir de contrôle du 1^{er} semestre en Algèbre

Date: 26 Janvier 2021

Durée: 1 Heure

Nombre de pages: 2

Exercice :(5 points)

1. Donner la forme exponentielle de $1 - e^{it}$ pour $t \in]0, 2\pi[$.

2. (a) Montrer que $\sum_{k=0}^{22} e^{i \frac{k\pi}{23}} = 1 + i \frac{\cos(\frac{\pi}{46})}{\sin(\frac{\pi}{46})}$.

(b) Dédurre la somme $S = \sum_{k=0}^{22} \sin(\frac{k\pi}{23})$.

3. (a) Soit $S_1 = \sum_{k=12}^{22} \sin(\frac{k\pi}{23})$.

Par le changement d'indice $p = 23 - k$, montrer que: $S_1 = \sum_{p=0}^{11} \sin(\frac{p\pi}{23})$.
(on rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) = \sin(x)$)

(b) En déduire que $S_1 = \frac{1}{2}S$.

Problème :(15 points)

Soit n un entier naturel non nul. On rappelle que $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace des matrices carrées, et que $M_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Pour une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, on note $L_i(A) = (a_{i1} \dots a_{in}) \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ la matrice ligne donnant la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et $C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ la matrice colonne donnant la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

1. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Ecrire les produits XY et YX .

2. Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. On note $AB = (c_{ij})$

(a) Indiquer la taille de la matrice AB .

(b) Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, rappeler c_{ij} en fonction des coefficients des matrices A et B .

(b) Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, donner c_{ij} en fonction des lignes et des colonnes des matrices A et B .

Dans toute la suite $n = 3$.

3. Soit A et P deux matrices de $M_3(\mathbb{C})$. On suppose que P est inversible et que pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$ il existe $\lambda_j \in \mathbb{C}$ tel que $AC_j(P) = \lambda_j C_j(P)$
 - (a) Donner $P^{-1}P$ en déduire $L_i(P^{-1})C_j(P)$ pour tout $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$.
 - (b) Pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, écrire $C_j(AP)$ en fonction de $C_j(P)$.
 - (c) En déduire pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, $C_j(P^{-1}AP)$.
 - (d) Écrire alors la matrice $P^{-1}AP$.
 - (e) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $(P^{-1}AP)^k$ en déduire une forme simple de A^k .

4. Application

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles vérifiant:

$$u_0 = 1, v_0 = -1, w_0 = 2 \text{ et } (S_k) : \begin{cases} u_{k+1} = -3u_k + v_k + 3w_k \\ v_{k+1} = -4u_k + v_k + 4w_k \\ w_{k+1} = -2u_k + v_k + 2w_k \end{cases}.$$

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}.$

- (a) Donner la matrice A telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T_{k+1} = AT_k$.
- (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T_k = A^k T_0$.
- (c) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
 - i) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
 - ii) Pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$ calculer $AC_j(P)$.
 - iii) Pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, trouver λ_j tel que $AC_j(P) = \lambda_j C_j(P)$.
 - iv) Déduire $P^{-1}AP$
- (d) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, expliciter u_k , v_k et w_k .

Bon travail.