

Devoir de Synthèse N° 1 : **Analyse**
Durée : 1H :30

Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1 :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée et $c \in \mathbb{R}$. On note

$$B = \{c + x, x \in A\}.$$

1. Montrer que B possède une borne supérieure.
2. Montrer que $\sup B = c + \sup A$.
3. On suppose que A admet un maximum. Montrer que B aussi et le calculer.
4. On suppose que A n'admet pas de maximum. Montrer que B non plus.

Exercice 2 :

Soit l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = x, \quad \forall x \in]-\infty, 0[.$$

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $] -\infty, 0[$. On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = y(-e^t)$.
(a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si g vérifie l'équation

$$(E_1) : g''(t) + g(t) = -e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Déterminer les solutions réelles de l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}$.
 - (c) En déduire les solutions réelles y de (E) sur $] -\infty, 0[$.
2. Dans cette question on résout (E) par une autre méthode, **on n'utilisera donc pas les résultats de la question précédente**.

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $] -\infty, 0[$.

- (a) On pose $u(x) = y(x) - \frac{x}{2}$.

Montrer que y est solution de (E) sur $] -\infty, 0[$ si et seulement si u est solution de l'équation homogène associée à (E), notée (H) : $x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$.

- (b) On pose $z(x) = xu'(x) + iu(x)$.

- i. Montrer que u est solution de (H) si et seulement si z est solution de l'équation : $(E_2) : xz'(x) - iz(x) = 0$

- ii. Déterminer les solutions **complexes** z de l'équation (E_2) sur $] - \infty, 0[$.
- (c) En déduire les solutions u complexes de (H) sur $] - \infty, 0[$ puis les solutions complexes y de (E).
- (d) En déduire les solutions **réelles** de (E) sur $] - \infty, 0[$.

Exercice3 :

On définit une suite réelle $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} U_0 \geq 0 \\ U_n = \sqrt{n + U_{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq \sqrt{n}$.
2. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$.
 (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq n + \frac{U_0}{2^n}$.
 (c) Montrer que $U_{n-1} = o(n^2)$.
 (d) Déduire que la suite $\left(\frac{U_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers une limite à préciser.
 (e) Montrer que $U_n \sim \sqrt{n}$.
3. (a) On pose $W_n = U_n - \sqrt{n}$. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite que l'on précisera.
 (b) Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - U_{n-1}$.
 (c) Justifier alors qu'il existe un entier naturel n_0 , tel que pour tout entier naturel n , si $n \geq n_0$ alors $U_n > U_{n-1} - \frac{1}{2}$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n$ est du signe de $1 + U_n - U_{n-1}$.
 (b) En déduire la monotonie de la suite $(U_n)_n$ à partir d'un certain rang.

Bonne Chance