

Examen de Physique du premier Semestre

(Durée : 2H)

N.B: Il sera tenu compte de la présentation des copies.

Exercice (7 points)

On étudie le mouvement d'un point M supposé ponctuel dans un référentiel orthonormé direct $\mathcal{R} (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les expressions des vecteurs vitesse et accélération sont exprimées dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ où (r, θ, z) sont les coordonnées cylindriques:

$$\vec{V}(M) = a \alpha t \vec{e}_\theta.$$

$$\vec{\gamma}(M) = a \alpha \vec{e}_\theta - a \alpha^2 t^2 \vec{e}_r$$

Où α et a sont des constantes positives.

1. Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération.
2. Déterminer l'expression des vecteurs unitaires de la base de Frenet-Serret $\vec{T}$ et $\vec{N}$ en fonction de ceux de la base cylindrique.
3. Calculer le rayon de courbure R_c .
4. Déterminer l'expression de θ en fonction de α et t (On prendra $\theta = 0$ à $t = 0$).
5. En déduire l'expression du vecteur position $\vec{OM}$.
6. Calculer en fonction de θ , l'angle ϕ que fait à chaque instant le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ avec le vecteur $\vec{OM}$.
7. Quelle est la nature du mouvement ? Quelle est la nature de la trajectoire ?

Problème (13 points)

Un disque horizontal tourne autour d'un axe vertical $\overrightarrow{OZ}$ avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{K}$ où ω est une constante positive et $\vec{K}$ est le vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{OZ}$. Le repère $R_G(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}) = R_G(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{K})$ orthonormé direct **non lié au disque** est galiléen (voir figure). Une bille M, assimilée à un point matériel de masse m , est assujettie à se déplacer dans une rainure circulaire de rayon a de l'axe $\overrightarrow{OZ}$. On désigne par $\vec{g}$ l'accélération de pesanteur.

A/ La bille glisse sans frottement dans la rainure.

On étudie le mouvement du point M dans le repère $R_1(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}) = R_1(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct lié au disque. On note $\alpha_1(t)$ l'angle entre $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{OM}$ et $\alpha(t)$ entre $\overrightarrow{OX}$ et $\overrightarrow{OM}$.

A la date $t = 0s$, l'axe $\overrightarrow{Ox}$ est confondu avec $\overrightarrow{OX}$ et la bille M est posée dans la rainure sur l'axe $\overrightarrow{OX}$ sans vitesse initiale dans $R_G(\vec{V}_a(t=0) = \vec{0})$.

On désigne par $B_C(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{k})$ la base locale, orthonormée direct, liée au point M.

Tous les vecteurs seront exprimés dans la base B_C . On note $\overrightarrow{OM} = a \vec{u}_1$.

1-a- Le mouvement de R_1 par rapport à R_G est une rotation pure. Préciser l'axe et l'angle de rotation.

b- En déduire la relation : $\alpha = \alpha_1 + \omega t$.

2- a- Déterminer les vecteurs vitesses relative $\vec{V}_r$ et d'entraînement $\vec{V}_e$ du point M. En déduire $\vec{V}_a$. Exprimer $\vec{V}_a$ en fonction de a et $\dot{\alpha}$.

b- Exprimer les accélérations relative $\vec{\gamma}_r$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_C$.

3-a- Exprimer, dans la base B_C , la relation fondamentale de la dynamique appliquée à M dans R_1 .

b- En déduire l'expression de α_1 ainsi que celle de α .

c- Trouver les composantes de la réaction $\vec{R}$.

4-a- En utilisant le calcul direct, déterminer l'expression de l'accélération absolue $\vec{\gamma}_a$.

b- Retrouver l'expression de α et les composantes de la réaction $\vec{R}$ par application de la relation fondamentale de la dynamique dans R_G .

B/ La bille glisse sans frottement sur le disque en rotation

On suppose maintenant qu'il n'y a pas de rainure (mouvement non guidé).

On note $\overrightarrow{OM} = r(t) \vec{u}_1$.

Les conditions initiales sont les mêmes que dans la partie A.

- 1- Déterminer les vecteurs vitesses relative $\vec{V}_r$ et d'entraînement $\vec{V}_e$ du point M. En déduire $\vec{V}_a$.
- 2- Exprimer les accélérations relative $\vec{\gamma}_r$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_C$.
- 3- Ecrire, dans la base B_C , la relation fondamentale de la dynamique appliquée à M dans R_1 .
- 4- En utilisant la relation $2\dot{r}\dot{\alpha} + r\ddot{\alpha} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\alpha}_1)$, ainsi que les conditions initiales, montrer que $\dot{\alpha}_1 = -\omega$. En déduire que $\ddot{r} = 0$.
- 5- a- Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du point M dans le repère R_1 .
b- Déterminer l'énergie mécanique du point matériel M.

