

Devoir de Contrôle N° 02



- ☞ L'usage de calculatrices est interdit.
- ☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

- Considérons dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^6 - 7X^4 + 8X^2 + 16$.
 - Montrer que i et 2 sont des racines de P et donner leur ordre de multiplicité.
 - Déduire toutes les racines de P .
 - Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- Soit F la fraction rationnelle donnée comme suit :

$$F = \frac{X^7 - 7X^5 + 8X^3 + 16X + 18}{X^6 - 7X^4 + 8X^2 + 16}.$$

- Donner le degré et la partie entière de F .
- Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et considérons les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \{a + bX + cX^2 \mid c = a + b\}.$$

$$G = \{P \in E \mid P(-2) = P(2) = 0\}.$$

- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- Prouver que $G = \text{vect}(P_0)$ avec $P_0 = X^2 - 4$.
- Montrer que $E = F \oplus G$.
- Considérons dans E les polynômes suivants :

$$P_1 = 1 + X + X^2, \quad P_2 = 1 - X + 2X^2, \quad P_3 = 2 + 3X^2, \quad P_4 = -2X + X^2$$

et notons $H = \text{vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

- Montrer que $H = \text{vect}(P_1, P_2)$.
- A-t-on $H = \text{vect}(P_1)$?
- Montrer que $E = F + H$.
- A-t-on $E = F \oplus H$?
- Trouver K un sous-espace vectoriel de E tel que $E = H \oplus K$.