

Devoir de contrôle N° 2 : **Analyse**
Durée : 1H

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ et la suite réelle $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n); \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in [0, 1]$.
2. Montrer que $\forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{3}|x - y|$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq (\frac{2}{3})^n |\frac{1}{2} - \alpha|$.
4. En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2 :

Soit $f(x) = \arctan x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Calcul des dérivées successives de l'arctangente en 0.

- (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(2k)}(-x) = -f^{(2k)}(x)$. En déduire la valeur de $f^{(2k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- (b) Rappeler l'énoncé de la formule de Leibniz.
- (c) Justifier l'identité $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f'(x) = 1$ et déduire que :

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0.$$

- (d) Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose $U_k = f^{(2k+1)}(0)$.
Calculer U_0 et donner une relation de récurrence reliant U_{k+1} et U_k .
- (e) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}, U_k = (-1)^k (2k)!$.

2. Calcul des dérivées successives de l'arctangente en un point quelconque.

- (a) En utilisant la formule $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}, \forall x > 0$, déterminer $\cos(\arctan(\frac{1}{x}))$ et $\sin(\arctan(\frac{1}{x}))$ en fonction de $\cos(\arctan x)$ et $\sin(\arctan x)$ lorsque $x > 0$.
- (b) Rappeler la formule reliant $\cos^2$ et $\tan^2$. En déduire que :

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! \cos^n(\arctan x) \sin \left(n \arctan \left(\frac{1}{x} \right) \right).$$

(On donne $\sin(a+b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$)

(d) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f^{(n)}(x)| \leq (n-1)!$.

3. (a) Appliquer la formule de Mac-Laurin à la fonction f à l'ordre $2n+1$. En déduire

$$\text{que } \left| \arctan x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{2n+2}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$ est convergente .

Bonne Chance