

Devoir de synthèse N° 2 : **Analyse**
 Durée : 2H

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1 :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.

1. Montrer que la fonction g est impaire et étudier ses variations (on ne demande pas de calculer les limites ni les extremums).
2. Déterminer le développement limité de g à l'ordre 5 au voisinage de 0.
3. (a) Démontrer les inégalités

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{t^2 + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \leq \frac{1}{t^2}.$$

(b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \arctan(2x) - \arctan(x) \leq g(x) \leq \frac{1}{2x}$.

(c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(d) Sachant que $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 0.39$, donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g .

4. On pose $H(x) = \int_0^x (\arctan(2t) - \arctan(t))dt$.

(a) Calculer $H(x)$.

(b) Démontrer la relation $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

(c) En déduire que : $H(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(x)$.

Exercice 2 :

On note φ la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} t \ln(t) & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que φ est continue sur $[0, 1]$.

- (b) Montrer que $\forall t \in [0, 1], |\varphi(t)| \leq \frac{1}{e}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 t^n \varphi(t) dt$ et pour $\alpha \in]0, 1[$, $J_n(\alpha) = \int_\alpha^1 t^{n+1} \ln(t) dt$.
- (a) Justifier l'existence de I_n et $J_n(\alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Calculer $J_n(\alpha)$ à l'aide d'une intégration par parties.
- (c) Montrer que : $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} J_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+2)^2}$.
- (d) Montrer que : $|\int_0^\alpha t^n \varphi(t) dt| \leq \frac{\alpha}{e}$. Qu'en déduit-on pour $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_0^\alpha t^n \varphi(t) dt$?
- (e) Dédire de la question précédente que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_n - J_n(\alpha)) = 0$ puis la valeur de I_n .
- (f) Montrer que $\sum_{n \geq 0} I_n$ converge.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $S_n = \sum_{k=0}^n I_k$, $S = \int_0^1 \psi(t) dt$ et $R_n = \int_0^1 t^{n+1} \psi(t) dt$, avec

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{\varphi(t)}{1-t} & \text{si } t \in [0, 1[\\ -1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

- (a) Justifier l'existence de S et R_n .
- (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = S - R_n$.
- (c) Justifier l'existence de $M = \sup_{t \in [0, 1]} |\psi(t)|$.
- (d) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq \frac{M}{n+2}$.
- (e) Montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = S$.
4. On admet dans cette question : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- (a) En déduire à l'aide de la question 2 la valeur exacte de : $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n$.
- (b) Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t \ln(t)}{t-1} dt = \frac{\pi^2 - 6}{6}.$$

Bonne Chance