

Section : PC 1

Date : 25-02-2023

Matière : Algèbre

Durée : 1 heure

## Devoir de Contrôle N° 02



☞ L'usage des calculatrices est interdit.

☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

### Exercice 1

- Considérons dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $P = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$ .
  - Montrer que  $-1$  et  $j$  sont des racines de  $P$  et donner leur ordre de multiplicité.
  - Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- Soit  $Q = 2X^5 + 5X^4 + 5X^3 + aX^2 + bX - 1$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .
  - Déterminer les réels  $a$  et  $b$  sachant que  $P$  divise  $Q$ .
  - Déduire toutes les racines de  $Q$ .
  - Factoriser  $Q$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$F = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (X + k)}.$$

### Exercice 2

Considérons dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  les ensembles suivants :

$$F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^t M = M\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} 3a+b & 2a+2b \\ a+b & 4a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- Déterminer  $F \cap G$ .
- La somme  $F + G$  est-elle directe ?
- Soient les matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .
  - Montrer que  $F = \text{vect}(A, B, C)$ .
  - Montrer que  $F \oplus \text{vect}(D) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
  - Déduire  $F + G$ .