

Section : P C 1

Date : 15-05-2023

Matière : Algèbre

Durée : 2 heures

Devoir de Synthèse N° 02



☞ L'usage de calculatrices est interdit.

☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

Soient $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de E et f l'application définie comme suit :

$$f : E \longrightarrow E, M \longmapsto M + {}^t M.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Montrer que f n'est pas injective puis déterminer une base de $\ker(f)$.
3. Déduire $\text{rg}(f)$ puis déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. A-t-on $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$?
5. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et g l'endomorphisme de E suivant :

$$g : E \longrightarrow E, M \longmapsto aM + b {}^t M.$$

- (a) Déterminer $\text{Mat}(g, \mathcal{B})$.
- (b) Montrer les inclusions suivantes :
 - i. $\ker(f) \subset \ker(g - (a - b)\text{id}_E)$.
 - ii. $\text{Im}(f) \subset \ker(g - (a + b)\text{id}_E)$.
- (c) Montrer qu'il existe $\mathcal{B}'$ une base de E telle que $\text{Mat}(g, \mathcal{B}')$ soit diagonale.
- (d) Exprimer g^2 en fonction de g et id_E .
- (e) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le couple (a, b) pour que g soit inversible puis donner g^{-1} .

Exercice 2

Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, m un paramètre réel et f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini comme suit :

$$f_m : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], P \longmapsto P + XP'' + P(m)X^2.$$

1. Déterminer $A_m = \text{Mat}(f_m, \mathcal{B})$.
2. Pour quelles valeurs du paramètre m , $f_m \in \text{Aut}(\mathbb{R}_2[X])$?
3. Déterminer $(f_m)^{-1}$ lorsque f_m est un automorphisme.
4. Déterminer $\text{rg}(f_m)$ suivant les valeurs de m .
5. On suppose maintenant que $m = 1$.
 - (a) Trouver une base de $\text{Im}(f_1)$.
 - (b) Trouver une base de $\ker(f_1)$.
 - (c) Montrer que $\ker(f_1) \oplus \text{Im}(f_1) = \mathbb{R}_2[X]$.
 - (d) A-t-on f_1 est un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$?
 - (e) Soient $P_1 = -2X + X^2$, $P_2 = -1 + X$ et $P_3 = X + X^2$.
 - i. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - ii. Trouver la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ puis donner son inverse.
 - iii. Expliciter la symétrie par rapport à $\text{Im}(f_1)$ parallèlement à $\ker(f_1)$.
 - iv. Déterminer $D = \text{Mat}(f_1, \mathcal{B}')$.
 - v. Dédurre qu'il existe une matrice M telle que $M^2 = A_1$.