



Devoir surveillé N° 2 : **Analyse**
Durée : 1H

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice :

En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $t \in]1, +\infty[$,

$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1.$$

Problème :

On note f la fonction définie par : $f(x) = x^{\frac{1}{3}}e^{-x}$ si $x > 0$. On pourra utiliser sans preuve que $2 \leq e \leq 3$.

1. (a) Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. On appelle encore f la fonction ainsi prolongée.
(b) La fonction f est-elle dérivable en 0? de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$?
2. (a) Montrer qu'il existe $c \in]8, 9[$ tel que $9^{\frac{1}{3}} = 2 + \frac{1}{3}e^{\frac{-2}{3}}$.
(b) En déduire que $2 \leq 9^{\frac{1}{3}} \leq \frac{25}{12}$.
(c) Montrer, en utilisant l'encadrement de e , que $f(1) - 1 \leq -\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \geq \frac{11}{75}$.
(d) Dresser le tableau de variations de $\varphi : x \mapsto (3x-1)e^{-x}$ sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.
(e) En déduire que $\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], 0 \leq (3x-1)e^{-x} \leq 2e^{-1}$.
(f) Montrer que $\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], 1 \leq \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{25}{12}$.
(g) En déduire que $\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], 0 \leq \frac{(3x-1)e^{-x}}{3x^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{25}{36}$.
3. (a) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. En déduire que f est décroissante sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ et que f' est bornée sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

- (b) En déduire que f est k -lipschitzienne sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$, où k est un réel à déterminer.
4. Montrer que f admet un point fixe λ unique dans l'intervalle $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.
5. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3}, \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
- (a) Dresser le tableau de variations de f . Montrer que $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ est stable par f . Que peut-on en déduire concernant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{25}{36} |u_n - \lambda|$.
- (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \lambda| \leq \left(\frac{25}{36}\right)^n |u_0 - \lambda|$.
- (d) Déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bonne Chance