



Devoir de synthèse N° 2 : Analyse

Durée : 2H

N.B :Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1 :

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n dt.$$

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et déduire qu'elle converge.
3. Montrer que $U_n + U_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
4. Déduire la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. Montrer que $U_{n+2} + U_n \leq 2U_n \leq U_{n-2} + U_n$.
6. Déduire que $U_n \sim \frac{1}{2n}$.
7. On pose, pour $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n(x) = \int_0^x (\tan t)^n dt, \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n U_k(x).$$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $\forall t \in [0, x]$:

$$\left| \sum_{k=1}^n (\tan t)^k - \frac{\tan t}{1 - \tan t} \right| \leq \frac{(\tan x)^{n+1}}{1 - \tan x}.$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| S_n(x) - \int_0^x \frac{\tan t}{1 - \tan t} dt \right| \leq x \frac{(\tan x)^{n+1}}{1 - \tan x}.$$

(c) En déduire que $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ (x est fixé) converge et donner sa limite sous forme d'intégrale.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{1+x^2}{2}$.

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$I_n = \int_0^b (f(x))^n dx,$$

où b est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$.

Partie I : Cas où $b < 1$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{b}{2^n} \leq I_n \leq \left(\frac{1+b^2}{2}\right)^n b$.
2. Dédire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n I_k, \forall n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Calculer S_n sous forme d'intégrale.
 - (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq \int_0^b \frac{2dx}{1-x^2}$.
 - (c) Dédire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} I_n$.
4. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^b \frac{(f(x))^{n+1}}{1-x^2} dx \leq \frac{b(f(b))^{n+1}}{1-b^2}$.
(b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \ln \left(\frac{1+b}{1-b} \right)$.

Partie II : Cas où $b = 1$.

On considère une suite réelle $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$J_n = \int_0^1 \left(\frac{1+x}{2} \right)^n dx.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq J_n$.
2. Donner l'expression de J_n en fonction de n .
3. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq \frac{1}{n+1}$.
5. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} I_n$.

Bonne Chance