

Section : PC 1

Date : 04-11-2023

Matière : Algèbre

Durée : 1 heure

Devoir de Contrôle N° 01



- ☞ L'usage de calculatrices est interdit.
- ☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^n C_n^k$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^n k C_n^k$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k$$

$$S_4 = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \ln(j^k)$$



Exercice 2

Considérons dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(A)$ puis déduire que A est inversible.
2. Calculer A^2 puis déterminer A^{-1} .
3. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer $\text{rg}(B)$. La matrice B est-elle inversible ?
5. Calculer la matrice $D = A^{-1}BA$.
6. Déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Soit m un paramètre réel et considérons le système linéaire suivant :

$$(S_m) : \begin{cases} x + 2y + 2z = m \\ -mx - 3y - 2z = 1 \\ mx + 2y + z = -1 \end{cases}$$

- (a) Montrer que (S_m) est de Cramer.
- (b) Résoudre le système (S_m) par la méthode du pivot de Gauss.
- (c) Soit A_m la matrice associée au système (S_m) .
 - i. Calculer la matrice A_m^2 .
 - ii. Retrouver l'ensemble des solutions de (S_m) sans chercher la matrice A_m^{-1} .