



Devoir de Synthèse N° 01



- ☞ L'usage de calculatrices est interdit.
- ☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

Soient $n \geq 2$ et O_n la matrice nulle de taille n . On rappelle qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = O_n$.

1. Considérons dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que les matrices M et N sont nilpotentes.
 - (b) Calculer $\det(M + N)$ puis vérifier que $M + N$ est inversible.
 - (c) Dédire que $M + N$ n'est pas nilpotente.
 - (d) Soit la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
 - i. Montrer que $MN \neq NM$.
 - ii. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(NM)^p X = (-3)^p X$.
 - iii. Dédire que la matrice MN n'est pas nilpotente.
2. Dans cette question, on considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices nilpotentes A et B telles que $AB = BA$.
- (a) Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$ et $B^p = O_n$.
 - (b) Dédire que les matrices AB et $(A + B)$ sont nilpotentes.

Exercice 2

Soient E un ensemble **non-vide** et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$. On rappelle que la différence symétrique de A et B est le sous-ensemble de E défini comme suit :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Exprimer $\chi_{A \Delta B}$ en fonction de χ_A et χ_B .
2. En déduire que $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
3. Considérons l'application suivante :

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E), X \longmapsto A \Delta X.$$

- (a) Calculer $f(A)$ et $f(\emptyset)$.
- (b) Déterminer l'application f^2 .
- (c) En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1} .
- (d) Résoudre l'équation suivante d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

$$(E_1) : f(X) = B.$$

4. Considérons l'application suivante :

$$g : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E), X \longmapsto A \cup X$$

- (a) Calculer $g(A)$, $g(\emptyset)$ et $g^{-1}(\{\emptyset\})$.
- (b) Montrer les équivalences suivantes :

$$g \text{ est injective} \iff g \text{ est surjective} \iff A = \emptyset.$$

- (c) Considérons l'équation suivante d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

$$(E_2) : g(X) = B.$$

- i. Montrer que (E_2) admet une solution $\iff A \subset B$.
- ii. Résoudre l'équation (E_2) .

- (d) Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \mathcal{R} Y \iff g(X) = g(Y)$$

- i. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- ii. Déterminer $\text{cl}(X)$ pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$.

5. Soit h l'application définie comme suit :

$$h : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)^2, X \longmapsto (f(X), g(X))$$

- (a) Montrer que h est injective.
- (b) L'application h est-elle bijective ?
- (c) Résoudre l'équation suivante d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

$$(E_3) : h(X) = (B, C).$$