

Devoir de Contrôle 1 : **Analyse**



N.B : L'utilisation des calculatrices est interdite.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos(1 - 2x)$.

1. (a) Donner le domaine de définition de f .
 (b) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et déterminer sa fonction dérivée f' .
 (c) Dresser le tableau de variation de f .
 (d) Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
2. (a) Démontrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle J que vous déterminerez.
 (b) Déterminer l'expression de la bijection réciproque de f .
 (c) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et calculer sa fonction dérivée.
3. Représenter f et f^{-1} dans un même repère.

Exercice 2 :

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes .

1. Soit $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$. En posant le changement de variable $t = \pi - x$, calculer I .
2. (a) En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x-1}$, calculer une primitive de $\frac{1}{x\sqrt{x-1}}$ sur $]1, +\infty[$.
 (b) Résoudre sur $]1, +\infty[$, l'équation différentielle (E) : $(x-1)y'(x) + \frac{1}{2}y(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.
3. (a) i. Soit $x \in]-\pi, \pi[$, vérifier que $\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$ et $\sin(x) = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$.
 ii. En utilisant le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$, calculer une primitive de $\frac{1}{\cos x + 2 \sin x - 3}$ sur $] -\pi, \pi[$.

- (b) Résoudre sur $] -\pi, \pi[$, le problème de Cauchy
$$\begin{cases} ch(x)y'(x) + sh(x)y(x) = \frac{1}{\cos x + 2 \sin x - 3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$