

Examen N° 1 : **Analyse**
 Durée : 2H

N.B :Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1 :

Soient A et B deux parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}_+$. On pose

$$D = \{x^2 + y^2 \text{ tel que } x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

1. Montrer que D est une partie bornée de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\sup(D) = (\sup A)^2 + (\sup B)^2$.

Exercice 2 :

Étant donné un réel $m \in \mathbb{R}$ fixé, on considère l'équation différentielle

$$(E) : (1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + m^2 y = 0.$$

1. Soit $z : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose pour $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = z(\arctan(x)).$$

Montrer que y est deux fois dérivable dans $\mathbb{R}$ et exprimer $y(x)$, $y'(x)$ et $y''(x)$ en fonction de $z(\arctan(x))$, $z'(\arctan(x))$ et $z''(\arctan(x))$.

2. (a) Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si z est solution sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ d'une équation différentielle $(E') : z'' + m^2 z = 0$.
 (b) Résolvez (E') et déduisez-en l'expression de la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$.

Problème : Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I : On définit une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} w_0 = b \in \mathbb{R}_+^*, \\ w_{n+1} = 2\sqrt{w_n}, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie pour tout entier naturel n .

2. (a) On pose $t_n = \ln(w_n)$, montrer que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
 (b) En déduire l'expression de t_n en fonction de n et de b .
 (c) Déduire que $w_n = 4 \left(\frac{b}{4} \right)^{\frac{1}{2^n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite ?

Partie II :

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R}_+^*, \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement monotone et strictement positive.
 (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que $(u_n)_n$ diverge.
2. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\ln \left(\frac{1}{u_n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) En déduire que

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

(d) Calculer $\sum_{j=0}^k (v_{n+1+j} - v_{n+j})$, pour tous $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

(e) En déduire que $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2$,

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

- (f) Déduire que $\ln(a) < v_k \leq \ln(a) + \ln(1 + \frac{1}{a})$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Que peut-on conclure ?
- (g) Montrer alors que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel noté α .
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver que : $u_n \leq e^{\alpha 2^n}$.
 (b) Par passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité de la question 2.e, montrer que $e^{\alpha 2^n} \leq 1 + u_n$.
 (c) En déduire que $u_n \sim e^{\alpha 2^n}$.

Bonne Chance