



Devoir de Contrôle du premier Semestre

(Durée : 1H30mn)

N.B: Il sera tenu compte de la présentation des copies.

PROBLÈME (14 POINTS)

On considère le référentiel fixe $\mathcal{R}$ (O,x,y,z), supposé galiléen, muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit Δ une tige de longueur L fixée au point O et faisant un angle constant α avec l'axe (Oz) tel que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Soit $\mathcal{R}_1$ (O,x₁,y₁,z₁) un référentiel mobile muni de la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 = \vec{k})$ lié à la tige Δ . Cette tige est contenue dans le plan vertical (x₁Oz₁). $\mathcal{R}_1$ tourne autour de l'axe vertical Oz avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \omega \vec{k}$. Un anneau assimilé à un point matériel de masse m se déplace *uniforme* sans frottement le long de la tige Δ . La position du point M est repérée par $\vec{OM} = r(t)\vec{u}_1$. Soit $\vec{u}_2$ un vecteur unitaire contenu dans le plan vertical (x₁Oz₁) et perpendiculaire à $\vec{u}_1$, et $\vec{u}_3$ un vecteur unitaire tel que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forme une base orthonormée directe ($\vec{u}_3 = -\vec{j}_1$). La base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est fixe dans $\mathcal{R}_1$. $\vec{g}$ est le vecteur accélération de pesanteur.

Tous les vecteurs doivent être exprimés dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

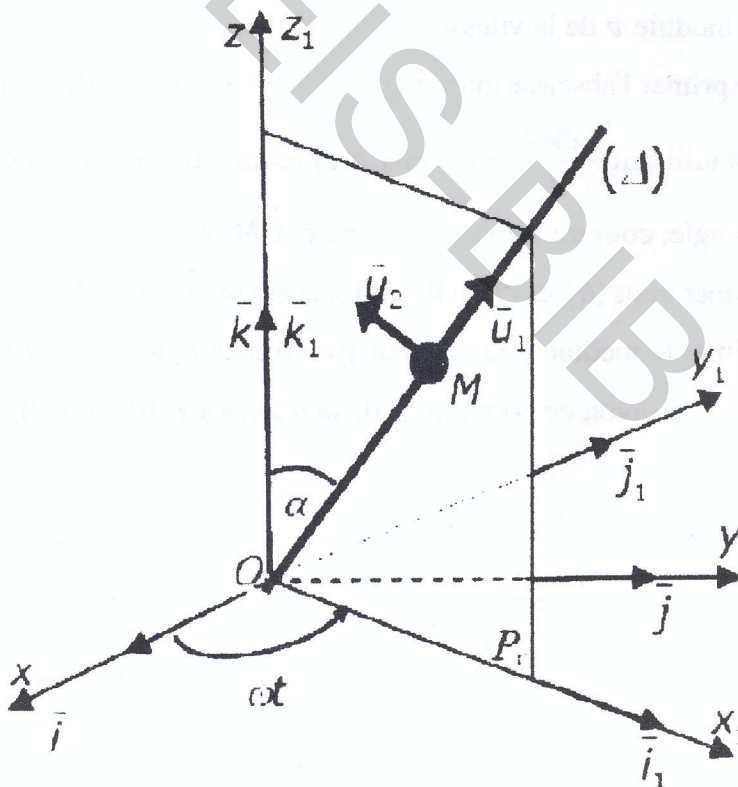
- 1°/ Déterminer la vitesse relative $\vec{v}(M/\mathcal{R}_1)$ et l'accélération relative $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$ de M.
- 2°/ Déterminer les accélérations d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ de M.
- 3°/ Donner les expressions des différentes forces appliquées sur M dans $\mathcal{R}_1$.
- 4°/ En appliquant le théorème du moment cinétique $\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R}_1)$ par rapport au point O dans $\mathcal{R}_1$, déterminer la réaction $\vec{R}$ ($\vec{R} = R_1\vec{u}_1 + R_2\vec{u}_2 + R_3\vec{u}_3$) exercée par la tige sur M.

5°/ En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}_1$, établir l'équation différentielle du mouvement de M.

6°/ Exprimer l'énergie potentiel de M dans $\mathcal{R}_1$ en fonction de m , g , r , α et ω . On prendra comme origine de l'énergie potentiel lorsque M se trouve en O.

7°/ Déterminer la position d'équilibre r_{eq} de l'anneau sur la tige dans $\mathcal{R}_1$. Montrer que cette position d'équilibre n'existe que si ω est supérieure à une vitesse angulaire ω_0 que l'on exprimera en fonction de g , L et α .

8°/ Quelle doit être la valeur ω_1 de ω pour que $r = L/2$ soit une position d'équilibre. Etudier la stabilité de cette position d'équilibre.



EXERCICE : (6PTS)

Soit $R(Oxyz)$ un repère orthonormé direct. On associe à ce repère une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On étudie le mouvement d'un point matériel M dont le vecteur accélération est :

$$\vec{\gamma} = k \frac{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}}{r^3}$$

k est une constante positive, $\vec{v}$ est la vitesse du point M et r est la distance OM supposée non nulle.

A l'instant initial, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est confondu avec l'axe (Ox) et sa norme est $\|\overrightarrow{OM}\| = a$, de plus le vecteur vitesse $\vec{v}$ de module v_0 est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$.

1°/

- a/ Montrer que la composante tangentielle γ_T de l'accélération est nulle. Dédurre le module v de la vitesse.
- b/ Exprimer l'abscisse curviligne $s(t)$. On prendra $s(0) = 0$.
- c/ En utilisant $\frac{d(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v})}{dt}$, exprimer $r(t)$ en fonction de v_0 , a et t .

Soit θ l'angle, compris entre 0 et π , entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$.

2°/ Exprimer $r \cos(\theta)$ et $r \sin(\theta)$ en fonction de v_0 , a et t .

3°/ Exprimer le module γ du vecteur $\vec{\gamma}$ en fonction de k , v_0 , a et θ .

4°/ Dédurre le rayon de courbure ρ de la trajectoire du point M en fonction de k , v_0 , a et θ .