

Section : PC 1

Date : 16-03-2024

Matière : Algèbre

Durée : 1h : 30 min

Devoir de Contrôle N° 02



L'usage des calculatrices est interdit.

Le sujet comporte deux pages.

Exercice 1

Considérons dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^6 + 2X^4 - 7X^2 + 4$.

1. Montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
2. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 4$.
3. Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
4. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, la fraction rationnelle $F = \frac{20}{P}$.

Exercice 2

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}_2[X]$ défini comme suit :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(-1) = P(0)\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Trouver deux polynômes P_1 et P_2 tels que $F = \text{vect}(P_1, P_2)$.
3. Soient $P_3 = X + 1$, $P_4 = X^2 + 3X + 1$ et $G = \text{vect}(P_3, P_4)$.
 - (a) Montrer que $F \oplus \text{vect}(P_3) = \mathbb{R}_2[X]$.
 - (b) Vérifier que $F + G = \mathbb{R}_2[X]$.
 - (c) Déterminer $F \cap G$.
 - (d) La somme $F + G$ est-elle directe ?
4. Soient $Q_0 \in \mathbb{R}_3[X]$ et $Q_k = Q_0 + P_k$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$. Considérons dans $\mathbb{R}_3[X]$ les sous-espaces vectoriels suivants :

$$H = \text{vect}(Q_0, Q_1) \quad \text{et} \quad K = \text{vect}(Q_2, Q_3).$$

- (a) Montrer que $H = \text{vect}(Q_0, P_1)$.
- (b) Montrer que $H + K = \mathbb{R}_2[X] \iff Q_0 \in \mathbb{R}_2[X]$.
- (c) Montrer que $H \oplus K = \mathbb{R}_3[X] \iff \deg(Q_0) = 3$.

Exercice 3

Soient a, b et c trois entiers relatifs tels que $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

1. Montrer que $a|bc \implies a|c$.
2. Montrer que $\text{pgcd}(a, bc) = \text{pgcd}(a, c)$.
3. Établir que $\text{pgcd}(ac, bc) = |c|$.
4. Dédurre $\text{pgcd}(a + b, a - b)$.