

Section : P C 1

Date : 13-05-2024

Matière : Algèbre

Durée : 2 heures

Devoir de Synthèse N° 02



L'usage de calculatrices est interdit.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et considérons les polynômes suivants :

$$P_1 = 1 - 2X + 2X^2 \quad P_2 = 2 - 3X + 2X^2 \quad \text{et} \quad P_3 = 2 - 2X + X^2$$

- Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Déterminer P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- Calculer P^2 puis trouver P^{-1} .
- Déduire les coordonnées du polynôme $Q = 3 - X^2$ dans la base $\mathcal{B}'$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer $\text{rg}(f)$ puis trouver une base de $\text{Im}(f)$.
- Calculer $f(P_1)$ puis donner une base de $\ker(f)$.
- A-t-on f est un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$?
- Montrer que $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.
- Donner l'expression de la projection sur $\ker(f)$ parallèlement à $\text{Im}(f)$.

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

- Montrer que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$ puis déduire $\text{rg}(f)$.
- Soient $u_1 \in E \setminus \ker(f)$ et $u_2 = f(u_1)$.
 - Montrer qu'il existe $u_3 \in E$ tel que (u_2, u_3) soit une base de $\ker(f)$.
 - Vérifier que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E .
 - Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3

Objectif : Dans cet exercice on se propose de déterminer, en utilisant deux méthodes, le terme général de la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par :

$$x_0 = 2, x_1 = 1 \text{ et } x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (A) Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (y, 2x + y)$$

1. Déterminer $M = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$.
2. Déterminer le polynôme $P(X) = \det(M - XI_2)$.
3. Soient λ_1 et λ_2 les racines de $P(X)$ telles que $\lambda_1 < \lambda_2$ et soit $w_n = (x_n, x_{n+1})$.
 - (a) Montrer que $\ker(f - \lambda_1 \text{id}_{\mathbb{R}^2}) = \text{vect}(v_1)$ où $v_1 = (-1, 1)$.
 - (b) Montrer que $\ker(f - \lambda_2 \text{id}_{\mathbb{R}^2}) = \text{vect}(v_2)$ où $v_2 = (1, 2)$.
 - (c) Vérifier que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
 - (d) Calculer $f(w_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (e) Dédire l'expression du terme général de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (B) Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et F le sous-ensemble de E formé par les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Considérons l'application $g : F \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (u_0, u_1)$.
 - (a) Montrer que g est un isomorphisme.
 - (b) En déduire la dimension de F .
3. Soient $r \in \mathbb{R}^*$ et considérons l'équation $(\star) : t^2 - t - 2 = 0$.
 - (a) Montrer que la suite $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à F si et seulement si r est une solution de l'équation $(\star)$.
 - (b) Soient r_1 et r_2 les solutions de l'équation $(\star)$.
 - i. Montrer que la famille $((r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de F .
 - ii. Retrouver l'expression du terme général de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.