



Devoir surveillé N° 2 : **Analyse**
Durée : 1H

N.B :Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1 :

Soient $f, g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$g(x) = (x-2)e^x + (x+2) \text{ et } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. (a) Donner un équivalent en 0 de $x \mapsto e^x - 1 - xe^x$.
(b) Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Que vaut $f'(0)$?
2. (a) Donner un équivalent de f' en $+\infty$ puis déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
(b) Calculer $g''(x)$ puis montrer que $g(x) \geq 0, \forall x \geq 0$.
(c) Vérifier que $f''(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^3}, \forall x > 0$.
(d) Dresser le tableau de variation de f' sur $[0, +\infty[$.
(e) Dédire que la fonction f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
3. On définit une suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |U_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2$.
(b) En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ln 2$.

Exercice 2 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\alpha(x) = x \arctan x - \alpha \sqrt{1+x^2}.$$

On note C_α la courbe représentative de f_α .

1. (a) Déterminer le développement limité de $\arctan$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
(b) Dédire le développement limité de f_α à l'ordre 4 au voisinage de 0.

- (c) En déduire l'équation de la tangente T_α à C_α au point $O(0, f_\alpha(0))$ et discuter suivant les valeurs de α la position de C_α par rapport à T_α au voisinage de O .
2. (a) Donner le développement limité de $g_\alpha : x \mapsto \frac{f_\alpha(x)}{x}$ à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$. (On donne : $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}, \forall x > 0$)
- (b) Déduire que C_α possède une asymptote D_α au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera et discuter suivant les valeurs de α la position de C_α par rapport à D_α au voisinage de $+\infty$.
-

Bonne Chance