



Section : PC 1

Date : 02-11-2024

Matière : Algèbre

Durée : 1h : 30 min

Devoir de Contrôle N° 01



L'usage de calculatrices est interdit.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^n C_n^k \sin(k\theta)$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta)$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} C_n^k$$

$$S_4 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$$

Exercice 2

Soient O_n la matrice nulle de taille n , $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = M^t M$.

- Déterminer les coefficients diagonaux de S en fonction de ceux de M .
- Déduire que $M = O_n \iff S = O_n$.

Exercice 3

Considérons dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer $\text{rg}(A)$ puis déduire que A est inversible.
- Calculer $A^2 - 3A$ puis déduire la matrice A^{-1} .
- Résoudre, selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le système linéaire suivant :

$$(S_m) : \begin{cases} mx - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

4. On considère les suites (α_n) et (β_n) définies par $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = -2\alpha_n \end{cases}$$



(a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

i. Déterminer la matrice B telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = BX_n$.

ii. Exprimer X_n en fonction de B^n et X_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Soit P la matrice définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

i. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .

ii. Calculer la matrice $D = P^{-1}BP$.

iii. Dédire la matrice B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de α_n et β_n en fonction de n .

(e) Dédire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n .