

Section : P C 1

Date : 18-12-2024

Matière : Algèbre

Durée : 2 heures

## Devoir de Synthèse N° 01



☞ L'usage de calculatrices est interdit.

☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

### Exercice 1

1. Considérons dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer  $\det(M)$  puis déduire que  $M$  est inversible.
  - (b) Donner  ${}^tM$  puis calculer  ${}^tMM$ . Déduire la matrice  $M^{-1}$ .
2. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$ .
- (a) Vérifier que  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ .
  - (b) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices dans  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .
    - i. Montrer que  $\det(A) \in \{-1, 1\}$ .
    - ii. Justifier que  $A$  est inversible et donner  $A^{-1}$ .
    - iii. Vérifier que  $A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .
    - iv. Prouver que  $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .
3. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on considère la matrice suivante :

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer la matrice  $R(0)$ .
- (b) Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels. Montrer que  $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ .

- (c) Dédurre que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la matrice  $R(\alpha)$  est inversible et déterminer son inverse.
- (d) Montrer que pour tout  $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ ,  $(R(\alpha))^n = R(n\alpha)$ .
- (e) Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $R(\alpha) \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$  puis déduire son inverse une autre fois.
- (f) Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'application  $f_\alpha$  définie comme suit :

$$f_\alpha : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X \longmapsto R(\alpha)X,$$

est bijective et  $f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}$ .

- 4. Considérons l'application  $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{O}_3(\mathbb{R}), \alpha \longmapsto R(\alpha)$ .
  - (a) Etudier l'injectivité de  $g$ .
  - (b) Montrer que  $g$  n'est pas surjective.
  - (c) Déterminer l'ensemble  $g^{-1}(\{I_3\})$ .

## Exercice 2

- 1. Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble non-vidé  $E$ .
  - (a) Montrer que  $A \cup B = A \iff B \subset A$
  - (b) Montrer que  $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$ .
  - (c) Montrer que  $A \setminus B = A \iff B \subset \bar{A}$ .
- 2. Soient  $a \in E$ ,  $I_a = \{X \in \mathcal{P}(E) \text{ tel que } a \in X\}$  et considérons l'application  $f$  définie par :

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E), X \longmapsto X \cup \{a\}.$$

- (a) Déterminer  $f(\emptyset)$  et  $f(\{a\})$ .
  - (b) Dédurre que  $f$  n'est pas injective.
  - (c) Montrer que  $f$  n'est pas surjective.
  - (d) Vérifier que  $f(\mathcal{P}(E)) = I_a$ .
- 3. Soit  $O_a = \mathcal{P}(E) \setminus I_a$  et considérons l'application suivante :

$$g : O_a \longrightarrow I_a, X \longmapsto f(X).$$

- (a) Montrer que  $g$  est injective.
  - (b) L'application  $g$  est-elle bijective ? Si oui, donner  $g^{-1}$ .
- 4. On considère sur  $\mathcal{P}(E)$  la relation binaire  $\mathcal{R}$  définie par :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \mathcal{R} Y \iff f(X) = f(Y).$$

- (a) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{P}(E)$ .
  - (b) Déterminer  $\text{cl}(X)$ , pour tout  $X \in \mathcal{P}(E)$ .