



Devoir de Contrôle 1 : Analyse

Exercice :

Soit

$$F : t \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[\mapsto \int \frac{t(1 + \tan^2(t))}{(1 + \tan(t))^2} dt.$$

1. Montrer que pour tout $x > -1$,

$$F(\arctan(x)) = \int \frac{\arctan(x)}{(x+1)^2} dx.$$

2. Trouver les réels a , b et c tels que pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

3. Dédurre à l'aide d'une intégration par parties, $F(\arctan(x))$, pour tout $x > -1$, et par suite, déterminer $F(t)$ pour tout $t \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Problème :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

1. (a) Trouver le domaine de définition de la fonction f .
(b) Etudier la parité de f .
(c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa fonction dérivée f' .
(d) Dresser le tableau de variation de f .
(e) Donner une expression simple de f sur $] -\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.
2. On se propose de simplifier l'expression de f par une autre méthode.

(a) Vérifier que $\cos(2\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$.

(b) Calculer $f(\tan(\theta))$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

(c) Dédurre une expression simple de f sur $[0, +\infty[$.

Bon Travail